1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
2,5		2		1		1		1		0.5		0.5		0.5		0.5		0.5	

Ejercicios desarrollados

1) *Sea* $L:\dfrac{2x-6}{2}=\dfrac{y-a}{2}=\dfrac{z+1}{b}$ *y el plano* π *que contiene al punto* $P=(4;-5;4)$ *y es ortogonal al vector* $(-3;-1;1)$

   a) ***Hallar*** a ***y*** $b\in\Re$ ***sabiendo que*** $P=(4;-5;4)\in L$

   b) ***Decidir si el plano*** π ***y la recta*** L ***son paralelos, perpendiculares, o ninguna de las dos cosas. Dar la intersección si la hubiera.***

a) ***Datos***

Recta $L:\dfrac{2x-6}{2}=\dfrac{y-a}{2}=\dfrac{z+1}{b}$

Punto $P=(4;-5;4)$

El punto P pertenece a la recta si verifica su ecuación, reemplazamos el punto en la ecuación de la recta para hallar el valor de a y b pedidos

$$L:\frac{2.4-6}{2}=\frac{-5-a}{2}=\frac{4+1}{b}$$

$$\frac{2}{2}=\frac{-5-a}{2}=\frac{4+1}{b}\Rightarrow\frac{2}{2}=\frac{-5-a}{2}\quad\wedge\quad\frac{2}{2}=\frac{4+1}{b}$$

$$1=\frac{-5-a}{2}\Rightarrow 2=-5-a\Rightarrow\boxed{a=-7}$$

Entonces $\boxed{a=-7\wedge b=5\Rightarrow\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+1}{5}}$

$$1=\frac{5}{b}\Rightarrow\boxed{b=5}$$

b) ***Plano*** π ***que contiene al punto*** $P=(4;-5;4)$ ***y es ortogonal al vector*** $(-3;-1;1)$, ***entonces podemos tomar como vector normal del plano al vector*** $(-3;-1;1)$

Datos: ***Vector Normal del Plano*** $\vec{n}=(-3;-1;1)$ ***Vector director de la recta*** $\vec{v}=(1;2;5)$

- $L\perp\pi\Rightarrow\vec{v}\parallel\vec{n}\quad\therefore\quad\vec{n}=\lambda\vec{v}$

  Como $\vec{n}=(-3;-1;1)$ *y* $\vec{v}=(1;2;5)\rightarrow(-3;-1;1)=\lambda(1;2;5)$

$$\begin{cases}-3=1\lambda\rightarrow\lambda=-3\\ -1=2\lambda\rightarrow\lambda=-\dfrac{1}{2}\\ 1=5\lambda\rightarrow\lambda=\dfrac{1}{5}\end{cases}\quad\therefore\vec{v}\not\parallel\vec{n}\Rightarrow\textit{Recta y plano no son perpendiculares}$$

- $L\parallel\pi\Rightarrow\vec{v}\perp\vec{n}\quad\therefore\quad\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

  $(-3;-1;1)\cdot(1;2;5)=-3\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot5=0\therefore\vec{v}\perp\vec{n}\Rightarrow$ $\boxed{\textit{Recta y plano son paralelos}}$

La recta L y el plano π ***son paralelos porque se cumple que*** $\vec{v}\perp\vec{n}$ ***y el punto*** $P=(4;-5;4)$ ***pertenece simultáneamente a la recta y al plano por lo tanto al cumplir las dos condiciones la recta está contenida en el plano*** π ***y podemos escribir*** $L\cap\pi=L$

2) *En una economía hipotética de dos industrias I_1 y I_2 la matriz de Leontief es* $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$.

a) Determinar la matriz de producción $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *para una demanda final* $D.F = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$

Debemos calcular $\boxed{X = (I-A)^{-1} H}$

La matriz de Leontief es $I - A = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

Calculamos $(I-A)^{-1} = \dfrac{1}{|I-A|} Adj(I-A)$

$$|I-A| = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{vmatrix} = \frac{2}{7}\cdot\frac{6}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{12}{49} - \frac{4}{49} = \frac{8}{49}$$

$$(I-A)^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(I-A) = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{|I-A|} Adj(I-A) = \frac{1}{\frac{8}{49}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \frac{49}{8} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{8} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{8} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}}$$

$$X = (I-A)^{-1}.H = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{8} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{4}\cdot 8 + \frac{7}{2}\cdot 16 \\ \frac{7}{8}\cdot 8 + \frac{7}{4}\cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 35 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 98 \\ 35 \end{pmatrix}}$$

b) Obtener el valor total de los otros costos de producción que ello implica.

$$Si \;\; I - A = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

	I_1	I_2	H	X
I_1	$\frac{5}{7}\cdot 98 = 70$	$\frac{4}{7}\cdot 35 = 20$	8	98
I_2	$\frac{1}{7}\cdot 98 = 14$	$\frac{1}{7}\cdot 35 = 5$	16	35
$V.A$	14	10	24	–
X	98	35	–	133

3) El conjunto de los $k \in \Re$ *tales que* $C = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3k \end{pmatrix}$ *es singular es:*

- ☐ *a)* $\left\{\frac{1}{3}\right\}$
- ☐ *b)* $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$
- ☐ *c)* $\Re - \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$
- ■ *d)* $\left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$

$C = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3k \end{pmatrix}$ *es singular sólo si y sólo si* $|C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3k \end{vmatrix} = 0$

Calculamos el determinante de C por la Regla de Laplace por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3k \end{vmatrix} = k \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3k \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3k \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot (-1)^{1+1} \cdot (6k+1) + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot (-3k) =$$

$$= k \cdot (6k+1) + 3k = \boxed{"*"}$$

$$= k \cdot (6k+1+3) = k \cdot (6k+4)$$

$$\Rightarrow \quad |C| = k \cdot (6k+4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = -\frac{2}{3} \vee k = 0}$$

Otra forma de resolver aplicando propiedad distributiva, en vez de factorear a partir de $\boxed{"*"}$ *debiendo luego buscar las raíces del polinomio*

$$|C| = k \cdot (6k+1) + 3k = \boxed{"*"}$$

$$= (6k^2 + k + 3k) = (6k^2 + 4k) = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.6.0}}{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{12} = \frac{-4 \pm 4}{12} \therefore k = -\frac{2}{3} \vee k = 0$$

Luego $|C| = 0 \Leftrightarrow \boxed{k \in \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}}$

4) *Sean A y* $B \in \Re^{3x3}$, *sabiendo que B es inversible*, $det(A) = 3$ *y se verifica* $A^2 B^T = B^{-2} A^8$ *el valor del* $\det(B)$ *es:*

- [x] *a)* 9
- [ ] *b)* 81
- [ ] *c)* $\frac{1}{9}$
- [ ] *d)* $\frac{1}{81}$

Datos

B es inversible, por lo tanto su determinante es no nulo.

$det(A) = 3$

$A^2 B^T = B^{-2} A^8$

Nos piden hallar el valor del determinante de B, aplicando propiedades de los determinantes

$$|A^2 B^T| = |B^{-2} A^8| \qquad \textit{Propiedades :} \quad |A.B| = |A||B|$$

$$|A^2||B^T| = |B^{-2}||A^8| \qquad |A^2| = |A|^2 \wedge |B^T| = |B| \wedge |B^{-2}| = |B^{-1}|^2$$

$$|A|^2 |B| = |B^{-2}||A|^8 \qquad |A^8| = |A|^8 \wedge |B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$$

$$|A|^2 |B| = \frac{1}{|B|^2} |A|^8$$

$$|B|^3 = \frac{|A|^8}{|A|^2} \Rightarrow |B|^3 = |A|^6 \Rightarrow |B| = \sqrt[3]{|A|^6} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$$

Por lo tanto $\boxed{|B| = 9}$

5) *Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ *y la ecuación matricial* $XA+A^T=I$ *, donde I es la matriz identidad,* $X\in\Re^{2\times 2}$ *es:*

- ☐ a) $X=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- ■ b) $X=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$
- ☐ c) $X=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$
- ☐ d) *Ninguna de las anteriores*

Para hallar la solución de la ecuación matricial, debemos resolverla

$XA+A^T=I$

$XA+A^T-A^T=I-A^T$ *Restamos miembro a miembro* A^T

$XA=I-A^T$ *simplificando*

$XA.A^{-1}=\left(I-A^T\right).A^{-1}$ *Post multiplicamos en ambos miembros por la matriz inversa de A*

$X.I=\left(I-A^T\right).A^{-1}$ *Asociando y por definición de matriz inversa*

$X=\left(I-A^T\right).A^{-1}$

Para hallar la matriz X debemos calcular las matrices $I-A^T$ *y la matriz inversa de A*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow I-A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz inversa de A, buscamos su determinanate para asegurarnos que A es regular, buscamos su matriz traspuesta y la matriz Adjunta

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=0.(-2)-1.(-1)=1$$

$$A^T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$AdjA=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot AdjA=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Entonces hallamos X resolviendo el producto de las matrices encontradas

$$X=\left(I-A^T\right)\cdot A^{-1}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}}$$

6) Sean $L_1: y = 3x + 5$, $L_2: y = 2x + 6$ *y* P *el punto donde se cortan* L_1 *y* L_2 *. La recta que pasa por* P *y es paralela al eje x tiene ecuación:*

- ☐ *a)* $(x; y) = (1;8) + \lambda(0;1)$
- ☐ *b)* $(x; y) = (8;1) + \lambda(0;1)$
- ■ *c)* $(x; y) = (1;8) + \lambda(1;0)$
- ☐ *d)* $(x; y) = (8;1) + \lambda(1;0)$

Debemos hallar el punto P, que es el punto dónde se intersectan las rectas L_1 y L_2, para ello resolvemos el sistema formado por las rectas

$L_1: y = 3x + 5$

$L_2: y = 2x + 6$

$$3x + 5 = 2x + 6$$
$$3x - 2x = 6 - 5$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 3.1 + 5 = 8 \quad \therefore \quad P = (1;8)$$

Si la recta debe pasar por el punto P y debe ser paralela al eje x, entonces la recta pedida es horizontal por lo tanto su pendiente es nula, podemos entonces establecer que su vector director es:

$\vec{v} = (1;0)$ *Recordando que la pendiente de la recta en el plano se obtiene :* $m = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{0}{1} = 0$

<u>*Datos de la recta r*</u> : $\begin{cases} P = (1;8) \\ \vec{v} = (1;0) \end{cases} \Rightarrow$ *r expresada en forma vectorial es :* $\boxed{(x; y) = (1;8) + \lambda(1;0)}$

7) *El sistema* $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x \quad -2z=6 \\ 2x \quad + \quad z=9 \end{cases}$ *y* $s=(a;a;b)$, *entonces* s *es solución del sistema:*

- ☐ *a)* *para* $a=3$ *y* $b=0$
- ■ *b)* *ningún valor de* a *y* b
- ☐ *c)* *para* $a=4$ *y* $b=1$
- ☐ *d)* *siempre que* $a-b=3$

Si $s=(a;a;b)$ *es una solución del sistema, entonces debe verificarlo, reemplazamos s en el sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x \quad -2z=6 \\ 2x \quad + \quad z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+a+b=6 \\ 2a \quad -2b=6 \\ 2a \quad + \quad b=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+ \quad b=6 \\ 2a-2b=6 \\ 2a+ \quad b=9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *Si observamos la primera y la tercera ecuación*
las mismas conducen a un absurdo ya que al mismo tiempo 2a + b no puede ser igual a 6 y a 9,
por lo tanto no existe ningún valor de a y b que satisfagan las condiciones para que s sea una
solución del sistema.

$\Rightarrow$ $\boxed{\textit{No existe ningún valor de a y b posibles}}$

8) *El sistema cuya matriz ampliada es* $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & -4 & 2 & b \end{array}\right)$ *resulta compatible indeterminado sí:*

- ☐ *a)* $a + 2b \neq 0$
- ■ *b)* $a + 2b = 0$
- ☐ *c)* $a = 0 \wedge b \in \Re$
- ☐ *d)* $a \in \Re \wedge b = 0$

Para determinar los valores de a y b pedidos, resolvemos el sistema aplicando el método de Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & -4 & 2 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & -4 & 2 & b \end{array}\right)(-1)F_2 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & -4 & 2 & b \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & -4 & 2 & b \end{array}\right)\frac{1}{2}F_3 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & -2 & 1 & \frac{b}{2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & -2 & 1 & \frac{b}{2} \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado, es necesario que $a + 2b = 0$*, ya de esa forma* $r(A) = r(A') = 3 < 4 \Rightarrow SCI$

Por lo tanto $\boxed{a + 2b = 0}$

9) *Dado el plano* $\pi : 2y - z = 3$ *y* $P = (2;1;0)$. *La ecuación de la recta* $L / L \perp \pi$ *y* $P \in L$ *es:*

■ *a)* $\dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1},\ x = 2$

□ *b)* $\dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$

□ *c)* $\dfrac{x}{2} = y - 2,\ z = -1$

□ *d)* $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$

Para hallar la ecuación de la recta L debemos además de un punto de la recta conocer su vector director, si tenemos en cuenta que la recta debe ser perpendicular al plano, entonces el vector normal del plano se puede tomar como vector director de la recta

$$\underline{\text{Datos de la recta } r}: \begin{cases} P = (2;1;0) \\ \vec{v}_L = (0;2;-1) \end{cases}$$

L expresada en forma vectorial es $L : (x;y;z) = (2;1;0) + \lambda(0;2;-1)$

$$\begin{cases} x = 2 + 0\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \quad \textit{Forma paramétrica} \\ z = 0 - 1\lambda \end{cases}$$

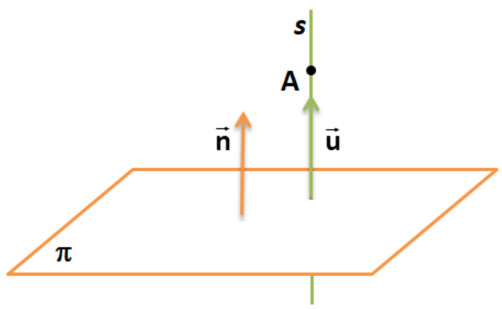
Expresamos la recta en forma simétrica ya que es así como está planteada en las posibles respuestas.

$$x = 2 \qquad \frac{y-1}{2} = \lambda \qquad \frac{z}{-1} = \lambda$$

Dado que las últimas dos igualdades tienen el mismo miembro derecho podemos garantizar que : $\dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}; x = 2$

Concluimos que la recta L que es perpendicular al plano y pasa por el punto P es :

$$\boxed{\frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}; x = 2}$$



10) *Sean* $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\4&5&4\\5&6&m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}$ *matrices de orden 3 y* $\left(A-B^{T}\right).X=N$ *el o los valores de* $m\in\mathbb{Z}$ *tal que la ecuación matricial tenga infinitas soluciones de la forma* $X\in\Re^{3x1}$*, siendo* N *la matriz nula de* $\Re^{3x1}$ *:*

- ☐ *a)* $m\neq 5$
- ■ *b)* $m=5$
- ☐ *c)* $m=4$
- ☐ *d)* $\nexists\, m\in\Re$

En primer lugar vamos a encontrar la matriz $\left(A-B^{T}\right)$

Si $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\4&5&4\\5&6&m\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}$, *entonces* $B^{T}=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&2&0\\2&2&0\end{pmatrix}$

$$A-B^{T}=\begin{pmatrix}3&2&2\\4&5&4\\5&6&m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\2&2&0\\2&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\3&4&m\end{pmatrix}$$

Si $\left(A-B^{T}\right).X=N\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\3&4&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Hay que considerar que la ecuación matricial define un sistema de ecuaciones homogéneo cuadrado, entoces la ecuación matricial tendrá infinitas soluciones si el determinante de la matriz $\left|A-B^{T}\right|$ *es igual a cero.*

$$\left|A-B^{T}\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\3&4&m\end{vmatrix}=1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&4\\4&m\end{vmatrix}+1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&4\\3&m\end{vmatrix}+1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=(3m-16)-(2m-12)+(-1)=0$$

$$=3m-16-2m+12-1=0\Rightarrow m-5=0\Rightarrow m=5$$

La respuesta correcta es $\boxed{m=5}$