**Resueltos Segundo Parcial - FADU**

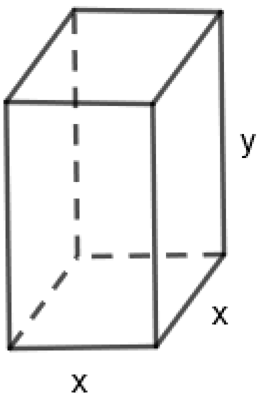
**25/10/2019**

**Tema A**

1. Se quiere construir un depósito con forma de prisma rectangular de base cuadrada, con capacidad de $\mathbf{360\ m^3}$ con el menor costo posible de producción. Sabiendo que los costos por $\mathbf{m^2}$ de los materiales para su construcción son los siguientes: **$400** para el fondo, **$300** para las paredes laterales y de **$600** para el techo del depósito, se pide:

   a) Realizar un esquema que represente la situación y donde se expliciten las variables del problema.
   b) Expresar la función a optimizar y los vínculos correspondientes.
   c) Determinar las dimensiones del depósito que minimizan el costo de construcción.

**a)**




**b)**

***Función a optimizar, Costo*** $\rightarrow$ $\boxed{C(x;y) = 1000x^2 + 1200xy}$

***Vínculo, Volumen*** $\rightarrow$ $V = 360\ m^3 \implies \boxed{x^2.y = 360}$

***Función a optimizar en una variable***

$$\boxed{\mathbf{C(x) = 1000x^2 + \frac{432000}{x}}}$$

**c)** Para determinar las dimensiones que minimizan el costo de producción, debemos buscar los puntos críticos:

$$C'(x) = 2000x - \frac{432000}{x^2} = 0$$

$$2000x = \frac{432000}{x^2}$$

$$x^3 = 216 \qquad \implies \qquad \boxed{x = 6}$$

Ahora debemos verificar si el punto crítico encontrado es un máximo o un mínimo, para ello utilizamos el ***Criterio de la Derivada Segunda***:

$$C''(x) = 2000 + \frac{864000}{x^3} \qquad \implies \qquad C''(6) > 0 \qquad \therefore \qquad \boxed{\mathbf{x = 6}}\ \boldsymbol{es\ un\ MÍNIMO}$$

Las dimensiones del depósito que minimizan el costo son: $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 6\ m} \\ \mathbf{y = 10\ m} \end{cases}}$

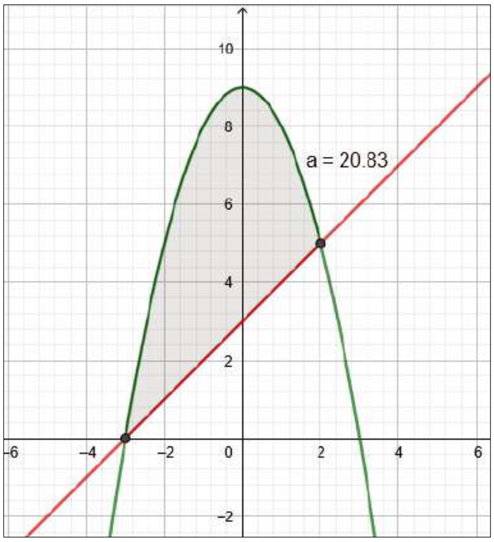
**2.** Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = 9 - x^2}$ y $\boldsymbol{g(x) = x + 3}$, se pide:

a) Realizar el gráfico de ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

b) Determinar el valor del área comprendida entre las funciones en forma exacta.

c) Determinar el valor del área comprendida entre las funciones en forma aproximada por el método de los trapecios utilizando **5** particiones.

**a)**




**b)**

**Área en forma exacta**

$$A = \int_{-3}^{2} [(9 - x^2) - (x + 3)]\, dx$$

$$= \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \Big]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{22}{3} - \left(-\frac{27}{2}\right) = \frac{125}{6} = \boxed{\mathbf{20{,}8\widehat{3}}}$$

**c)** **Área Aproximada por Método de los trapecios $(n = 5)$**

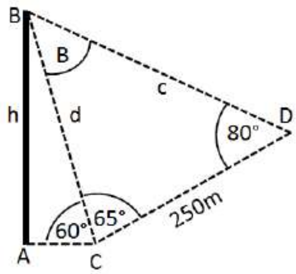
Siendo $\boldsymbol{g(x) = -x^2 - x + 6}$

$$A = \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\, dx \cong T_5 = \frac{1}{2}.[g(-3) + 2.g(-2) + 2.g(-1) + 2.g(0) + 2.g(1) + g(2)] =$$

$$= \frac{1}{2}.[0 + 2.4 + 2.6 + 2.6 + 2.4 + 0] = 20$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A \cong 20}}$$

**3.** Para medir la altura de la montaña **h=AB** nos hemos situado en los puntos **C** y **D** distantes entre sí **250 metros**, y hemos tomado las siguientes medidas: $\widehat{ACB} = 60°$, $\widehat{BCD} = 65°$, $\widehat{BDC} = 80°$.




a) Calcular la distancia de **C** a la cima de la montaña en B

b) Calcular la altura de la montaña.

a) $\mathbf{C\widehat{B}D + B\widehat{C}D + B\widehat{D}C = 180° \rightarrow C\widehat{B}D = 180° - B\widehat{C}D - B\widehat{D}C \rightarrow C\widehat{B}D = 180° - 65° - 80° \rightarrow} \boxed{\mathbf{C\widehat{B}D = 35°}}$

$$\frac{\boldsymbol{250m}}{\boldsymbol{sen\ 35°}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{sen\ 80°}} \rightarrow \boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{250m}}{\boldsymbol{sen\ 35°}} \cdot \boldsymbol{sen\ 80°} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{d = 429{,}24\ m}}$$

b) $\boldsymbol{sen\ 60° = \frac{h}{d} \rightarrow h = d.sen\ 60° \rightarrow h = 429{,}24m\ .sen\ 60° \rightarrow} \boxed{\boldsymbol{h = 371{,}73m}}$

**4.** El **69%** de los habitantes de una ciudad ven series en la plataforma Netflix, el **35%** ve películas y el **18%** no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad:

a) Calcule la probabilidad de que vea series o películas. Calcule la probabilidad que vea ambas

**Notación: Series (S) Películas (P)**

$$p(S) = 0{,}69 \quad p(P) = 0{,}35 \quad p(S' \cap P') = 0{,}18$$

| | Películas (P) | No Películas (P') | Total |
|---|---|---|---|
| Series (S) | **0,22** | **0,47** | **0,69** |
| No Series (S') | **0,13** | **0,18** | **0,31** |
| Total | **0.35** | **0,65** | **1** |

$$p(S' \cap P') = 0{,}18 \Rightarrow \boxed{p(S \cup P) = 0{,}82} \ \textit{Probabilidad que vean series o películas}$$

$$p(S \cup P) = p(S) + p(pP) - p\ (S \cap P) = 0{,}82$$

$$0{,}82 = 0{,}69 + 0{,}35 - p\ (S \cap P) \Rightarrow \boxed{p\ (S \cap P) = 0{,}22} \ \textit{Probabilidad que vean ambas}$$

b) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

$$p(P\ /\ S) = \frac{p\ (S \cap P)}{p\ (S)} = \frac{0{,}22}{0{,}69} = 0{,}3188 \Rightarrow \boxed{p\ (P\ /\ S) = 0{,}3188}$$

**5.** Suponiendo que los precios de los distintos artículos producidos por una empresa vienen dados por:

| **Precios** | **5-15** | **15-25** | **25-35** | **35-45** |
|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | **15** | **k** | **2k** | **3** |

a) Calcule el valor de **k** sabiendo que el precio promedio es **25**

$$\bar{x} = \frac{10.15 + 20.k + 30.2k + 40.3}{18 + 3k} = 25$$

$$\frac{270 + 80k}{18 + 3k} = 25$$

$$270 + 80k = 25.(18 + 3k)$$

$$270 + 80k = 450 + 75k$$

$$5k = 180 \Rightarrow \boxed{k = 36}$$

b) Calcule el precio más frecuente.

| **Precios** | **5-15** | **15-25** | **25-35** | **35-45** |
|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | **15** | **36** | **72** | **3** |

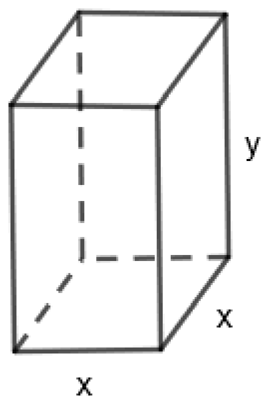
$$M_0 = L_i + a.\frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

$$M_0 = 25 + 10.\frac{36}{36 + 69} = 28{,}43 \Rightarrow \boxed{M_0 = \$28{,}43}$$

**Tema B**

1. Se quiere construir un depósito con forma de prisma rectangular de base cuadrada, con capacidad de $\mathbf{450\ m^3}$ con el menor costo posible de producción. Sabiendo que los costos por $\mathbf{m^2}$ de los materiales para su construcción son los siguientes: **$400** para el fondo, **$200** para las paredes laterales y de **$500** para el techo del depósito, se pide:
   a) Realizar un esquema que represente la situación y donde se expliciten las variables del problema.
   b) Expresar la función a optimizar y los vínculos correspondientes.
   c) Determinar las dimensiones del depósito que minimizan el costo de construcción.

**a)**




**b)**

***Función a optimizar, Costo*** $\rightarrow$ $\boxed{C(x;y) = 900x^2 + 800xy}$

***Vínculo, Volumen*** $\rightarrow$ $V = 450\ m^3 \implies \boxed{x^2.y = 450}$

***Función a optimizar en una variable***

$$\boxed{\boldsymbol{C(x) = 900x^2 + \frac{360000}{x}}}$$

**c)** Para determinar las dimensiones que minimizan el costo de producción, debemos buscar los puntos críticos:

$$C'(x) = 1800x - \frac{360000}{x^2} = 0$$

$$1800x = \frac{360000}{x^2}$$

$$x^3 = 200 \qquad \implies \qquad \boxed{x = 5{,}85}$$

Ahora debemos verificar si el punto crítico encontrado es un máximo o un mínimo, para ello utilizamos el ***Criterio de la Derivada Segunda***:

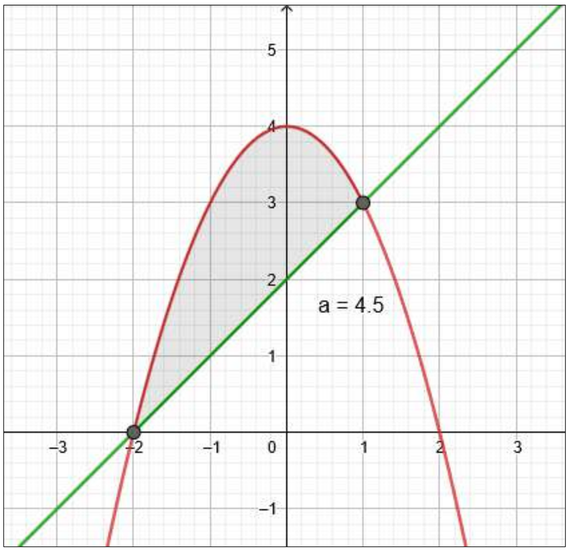
$$C''(x) = 1800 + \frac{720000}{x^3} \qquad \implies \qquad C''(5{,}85) > 0 \qquad \therefore \qquad \boxed{\boldsymbol{x = 5{,}85}}\ \boldsymbol{es\ un\ MÍNIMO}$$

Las dimensiones del depósito que minimizan el costo son: $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = 5{,}85\ m} \\ \boldsymbol{y = 13{,}15\ m} \end{cases}}$

**2.** Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = 4 - x^2}$ y $\boldsymbol{g(x) = x + 2}$, se pide:

a) Realizar el gráfico de ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.
b) Determinar el valor del área comprendida entre las funciones en forma exacta.
c) Determinar el valor del área comprendida entre las funciones en forma aproximada por el método de los trapecios utilizando 6 particiones.

**a)**




**b)**

**Área en forma exacta**

$$A = \int_{-2}^{1} [(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2} = \boxed{4,5}$$

**c) Área Aproximada por Método de los trapecios $(n = 6)$**

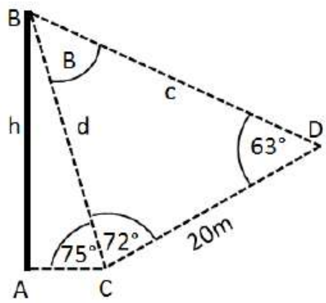
Siendo $\boldsymbol{g(x) = -x^2 - x + 2}$

$$A = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx \cong T_6 = \frac{1}{4}.[g(-2) + 2.g(-1{,}5) + 2.g(-1) + 2.g(-0{,}5) + 2.g(0) + 2.g(0{,}5) + g(1)]$$

$$= \frac{1}{4}.[0 + 2\,.\,1{,}25 + 2\,.\,2 + 2\,.\,2{,}25 + 2\,.\,2 + 2\,.\,1{,}25 + 0] = 4{,}375$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A \cong 4,375}}$$

**3.** Para medir la altura de la montaña **h=AB** nos hemos situado en los puntos **C** y **D** distantes entre sí **20 metros**, y hemos tomado las siguientes medidas: $\hat{ACB} = 75°$, $\hat{BCD} = 72°$, $\hat{BDC} = 63°$.




a) Calcular la distancia de **C** a la cima de la montaña en B
b) Calcular la altura de la montaña.

a) $\boldsymbol{C\hat{B}D + B\hat{C}D + B\hat{D}C = 180° \to C\hat{B}D = 180° - B\hat{C}D - B\hat{D}C \to C\hat{B}D = 180° - 72° - 63° \to} \boxed{\boldsymbol{C\hat{B}D = 45°}}$

$$\boldsymbol{\frac{20m}{sen\,45°} = \frac{d}{sen\,63°} \quad \to \quad d = \frac{20m}{sen\,45°} \cdot sen\,63° \quad \to \quad \boxed{d = 25,20\ m}}$$

c) $\boldsymbol{sen\,75° = \frac{h}{d} \quad \to \quad h = d.sen\,75° \quad \to \quad h = 25,20m\,.\,sen\,75° \to} \boxed{\boldsymbol{h = 24,34m}}$

4. El **57%** de los habitantes de una ciudad ven series en la plataforma Netflix, el **33%** ve películas y el **22%** no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad:

a) Calcule la probabilidad de que vea series o películas. Calcule la probabilidad que vea ambas

**Notación: Series (S) Películas (P)**

$$p(S) = 0{,}57 \quad p(P) = 0{,}33 \quad p(S' \cap P') = 0{,}22$$

| | Películas (P) | No Películas (P') | Total |
|---|---|---|---|
| Series (S) | **0,12** | **0,45** | **0,57** |
| No Series (S') | **0,21** | **0,22** | **0,43** |
| Total | **0.33** | **0,67** | **1** |

$$p(S' \cap P') = 0{,}22 \Rightarrow \boxed{p(S \cup P) = 0{,}78} \ \textit{Probabilidad que vean series o películas}$$

$$p(S \cup P) = p(S) + p(pP) - p\ (S \cap P) = 0{,}78$$

$$0{,}78 = 0{,}57 + 0{,}33 - p\ (S \cap P) \Rightarrow \boxed{p\ (S \cap P) = 0{,}12} \ \textit{Probabilidad que vean ambas}$$

b) Sabiendo que ve películas, calcule la probabilidad de que vea series.

$$p\ (S\ /\ P) = \frac{p\ (S \cap P)}{p\ (P)} = \frac{0{,}12}{0{,}33} = 0{,}3636 \Rightarrow \boxed{p\ (P\ /\ S) = 0{,}3636}$$

**5.** Suponiendo que los precios delos distintos artículos producidos por una empresa vienen dados por:

| **Precios** | **5-15** | **15-25** | **25-35** | **35-45** |
|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | **30** | **2k** | **4k** | **6** |

a) Calcule el valor de **k** sabiendo que el precio promedio es **25**

$$\bar{x} = \frac{10.30 + 20.2k + 30.4k + 40.6}{36 + 6k} = 25$$

$$\frac{540 + 160k}{36 + 6k} = 25$$

$$540 + 160k = 25.(36 + 6k)$$

$$540 + 160k = 900 + 150k$$

$$10k = 360 \Rightarrow \boxed{k = 36}$$

b) Calcule el precio más frecuente.

| **Precios** | **5-15** | **15-25** | **25-35** | **35-45** |
|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | **30** | **72** | **144** | **6** |

$$M_0 = L_i + a.\frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

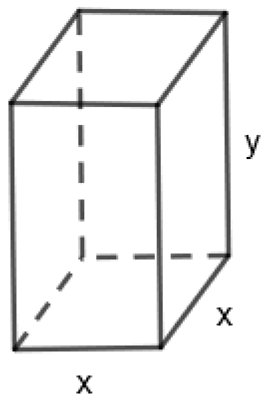
$$M_0 = 25 + 10.\frac{72}{72 + 138} = 28{,}43 \Rightarrow \boxed{M_0 = \$28{,}43}$$

## Tema C

1. Se quiere construir un depósito con forma de prisma rectangular de base cuadrada, con capacidad de $\mathbf{480\ m^3}$ con el menor costo posible de producción. Sabiendo que los costos por $\mathbf{m^2}$ de los materiales para su construcción son los siguientes: **$500** para el fondo, **$300** para las paredes laterales y de **$400** para el techo del depósito, se pide:

   a) Realizar un esquema que represente la situación y donde se expliciten las variables del problema.
   b) Expresar la función a optimizar y los vínculos correspondientes.
   c) Determinar las dimensiones del depósito que minimizan el costo de construcción.

**a)**




**b)**

***Función a optimizar, Costo*** $\rightarrow$ $\boxed{C(x;y) = 900x^2 + 1200xy}$

***Vínculo, Volumen*** $\rightarrow$ $V = 480\ m^3 \Longrightarrow \boxed{x^2 . y = 480}$

***Función a optimizar en una variable***

$$\boxed{\mathbf{C(x) = 900x^2 + \frac{576000}{x}}}$$

**c)** Para determinar las dimensiones que minimizan el costo de producción, debemos buscar los puntos críticos:

$$C'(x) = 1800x - \frac{576000}{x^2} = 0$$

$$1800x = \frac{576000}{x^2}$$

$$x^3 = 320 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 6{,}84}$$

Ahora debemos verificar si el punto crítico encontrado es un máximo o un mínimo, para ello utilizamos el ***Criterio de la Derivada Segunda***:

$$C''(x) = 1800 + \frac{1152000}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad C''(6{,}84) > 0 \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{x = 6,84}}\ \boldsymbol{es\ un\ MÍNIMO}$$

Las dimensiones del depósito que minimizan el costo son: $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 6,84\ m} \\ \mathbf{y = 10,26\ m} \end{cases}}$

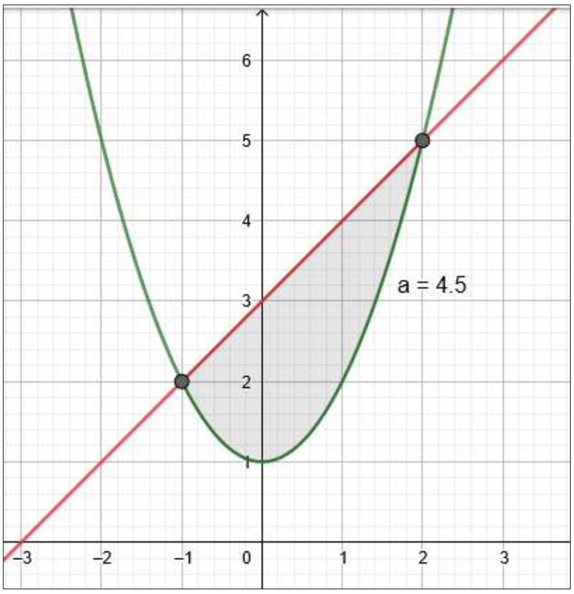
**2.** Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = x + 3}$, se pide:

a) Realizar el gráfico de ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

b) Determinar el valor del área comprendida entre las funciones en forma exacta.

c) Determinar el valor del área comprendida entre las funciones en forma aproximada por el método de los trapecios utilizando **6** particiones.

**a)**




**b)**

<u>**Área en forma exacta**</u>

$$A = \int_{-1}^{2} [(x+3) - (x^2+1)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2} = \boxed{\mathbf{4,5}}$$

**c) <u>Área Aproximada por Método de los trapecios $(\boldsymbol{n = 6})$</u>**

Siendo $\boldsymbol{g(x) = -x^2 + x + 2}$

$$A = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx \cong T_6 = \frac{1}{4}.[g(-1) + 2.g(-0{,}5) + 2.g(0) + 2.g(0{,}5) + 2.g(1) + 2.g(1{,}5) + g(2)]$$

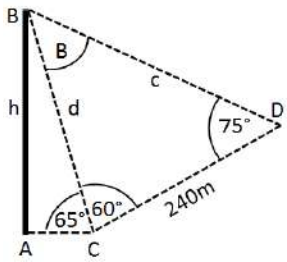
$$= \frac{1}{4}.[0 + 2 .\ 1{,}25 + 2 . 2 + 2 . 2{,}25 + 2 . 2 + 2 . 1{,}25 + 0] = 4{,}375$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A \cong 4{,}375}}$$

**3.** Para medir la altura de la montaña **h=AB** nos hemos situado en los puntos **C** y **D** distantes entre sí **240 metros**, y hemos tomado las siguientes medidas: $A\hat{C}B = 65°$, $B\hat{C}D = 60°$, $B\hat{D}C = 75°$.

a) Calcular la distancia de **C** a la cima de la montaña en B

b) Calcular la altura de la montaña.




a) $\boldsymbol{C\hat{B}D + B\hat{C}D + B\hat{D}C = 180° \rightarrow C\hat{B}D = 180° - B\hat{C}D - B\hat{D}C \rightarrow C\hat{B}D = 180° - 60° - 75° \rightarrow \boxed{C\hat{B}D = 45°}}$

$$\boldsymbol{\frac{240m}{sen\ 45°} = \frac{d}{sen\ 75°} \quad \rightarrow \quad d = \frac{240m}{sen\ 45°} \cdot sen\ 75° \quad \rightarrow \quad \boxed{d = 327{,}85\ m}}$$

b) $\boldsymbol{sen\ 65° = \frac{h}{d} \quad \rightarrow \quad h = d.sen\ 65° \quad \rightarrow \quad h = 327{,}85m\ .sen\ 65° \rightarrow \boxed{h = 297{,}13m}}$

**4.** El **55%** de los habitantes de una ciudad ven series en la plataforma Netflix, el **40%** ve películas y el **20%** no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad:

a) Calcule la probabilidad de que vea series o películas. Calcule la probabilidad que vea ambas

**Notación: Series (S) Películas (P)**

$$p(S) = 0{,}55 \quad p(P) = 0{,}40 \quad p(S' \cap P') = 0{,}20$$

| | Películas (P) | No Películas (P') | Total |
|---|---|---|---|
| Series (S) | **0,15** | **0,40** | **0,55** |
| No Series (S') | **0,25** | **0,20** | **0,45** |
| Total | **0.40** | **0,60** | **1** |

$$p(S' \cap P') = 0{,}20 \Rightarrow \boxed{p(S \cup P) = 0{,}80} \; \textit{Probabilidad que vean series o películas}$$

$$p(S \cup P) = p(S) + p(pP) - p\,(S \cap P) = 0{,}80$$

$$0{,}80 = 0{,}55 + 0{,}40 - p\,(S \cap P) \Rightarrow \boxed{p\,(S \cap P) = 0{,}15} \; \textit{Probabilidad que vean ambas}$$

b) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

$$p\,(P\,/\,S) = \frac{p\,(S \cap P)}{p\,(S)} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = 0{,}2727 \Rightarrow \boxed{p\,(P\,/\,S) = 0{,}2727}$$

**5.** Suponiendo que los precios delos distintos artículos producidos por una empresa vienen dados por:

| **Precios** | **5-15** | **15-25** | **25-35** | **35-45** |
|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | **45** | **3k** | **6k** | **9** |

a) Calcule el valor de **k** sabiendo que el precio promedio es **25**

$$\bar{x} = \frac{10.45 + 20.3k + 30.6k + 40.9}{54 + 9k} = 25$$

$$\frac{810 + 240k}{54 + 9k} = 25$$

$$810 + 240k = 25.(54 + 9k)$$

$$810 + 240k = 1350 + 225k$$

$$15k = 540 \Rightarrow \boxed{k = 36}$$

b) Calcule el precio más frecuente.

| **Precios** | **5-15** | **15-25** | **25-35** | **35-45** |
|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | **45** | **108** | **216** | **9** |

$$M_0 = L_i + a.\frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

$$M_0 = 25 + 10.\frac{108}{108 + 207} = 28{,}43 \Rightarrow \boxed{M_0 = \$28{,}43}$$