Resueltos Tema A – Primer Parcial FADU 30 de junio 2023

1. a) Para que se cumpla que $\vec{u} \perp \vec{v}$ ***debemos pedir que el producto escalar entre ellos sea nulo:***

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k;\ -1; k+1) \cdot (1; 8; k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1.k - 1.8 + k.(k+1) = 0$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{k = 2}} \quad \vee \quad \boxed{\boldsymbol{k = -4}}$$

b) Si $k = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = (1;\ -1; 2) \quad y \quad \vec{v} = (1; 8; 1)$

Para hallar el ángulo α formado por ambos vectores debemos realizar:

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Hallamos lo pedido:

$$\vec{u}.\vec{v} = (1;\ -1{:}\, 2).(1; 8; 1) = 1 - 8 + 2 = -5$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \qquad y \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{66}$$

Entonces:

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{-5}{\sqrt{6}.\sqrt{66}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arc\cos\left(\frac{-5}{\sqrt{6}.\sqrt{66}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha \cong 104° \, 33' \, 7''}}$$

2. a) Para que el plano π sea perpendicular a la recta debe cumplir que:

El vector normal del plano sea paralelo al vector director de la recta.

Determinamos ambos vectores:

Normal del plano: $\vec{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{1}; \boldsymbol{m};\ -\boldsymbol{3})$ **Director de la recta:** $\vec{\boldsymbol{d}} = (\boldsymbol{2}; \boldsymbol{5};\ -\boldsymbol{6})$

Como dos vectores paralelos tienen sus componentes homólogas proporcionales, podemos plantear:

$$\frac{1}{2} = \frac{m}{5} = \frac{-3}{-6} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{m}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{m = \frac{5}{2}}}$$

b) Si el punto de coordenadas $(-2; 7; 2)$ debe pertenecer al plano, debe verificar su ecuación, entonces planteamos:

$$-2 + m.7 - 3.2 = 6 \quad \Rightarrow -2 + 7m - 6 = 6 \quad \Rightarrow \quad 7m = 14 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{m = 2}}$$

3. La ecuación de la cónica en forma polinómica es: $x^2 - 4y^2 + 4x - 12 = 0$

a) Comenzamos por completar cuadrados para expresarla en forma canónica:

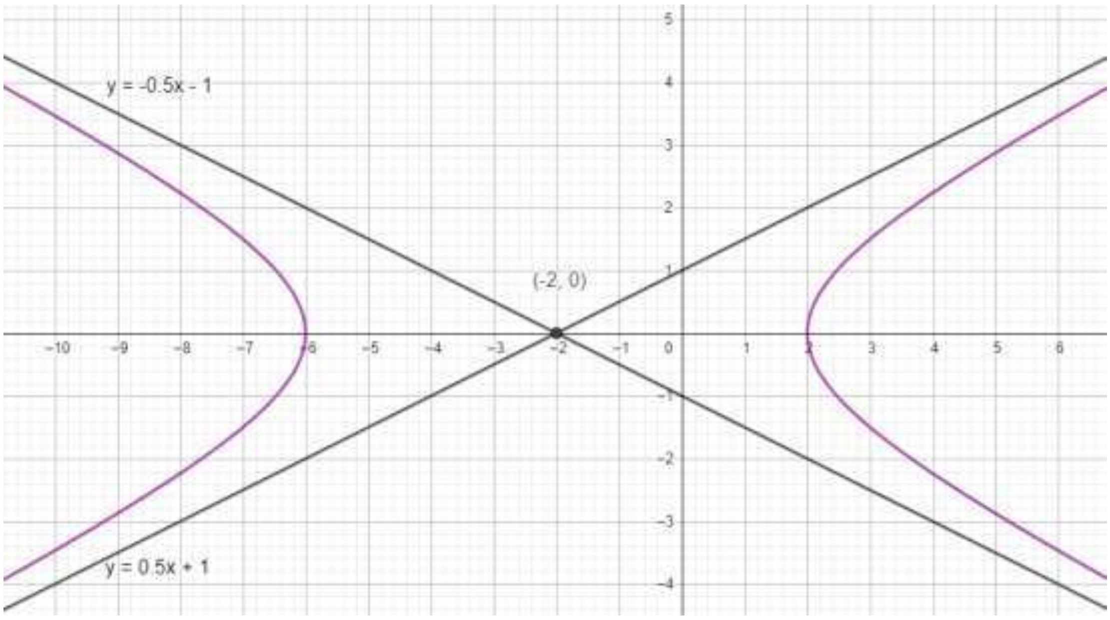
$$x^2 - 4y^2 + 4x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2 - 4 - 4y^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2 - 4y^2 = 16$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1}}$$

Ahora completamos el cuadro:

Ecuación Canónica $$\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$$	**Coordenadas del centro o vértice (según corresponda)** $$C=(-2;0)$$
Coordenadas de los Focos **Foco 1** $\left(-2+2\sqrt{5};0\right)$ o $(2,47;0)$ **Foco 2** $\left(-2-2\sqrt{5};0\right)$ o $(-6,47;0)$	**Coordenadas de los vértices** **Reales** $(-6;0)$ y $(2;0)$ **Imaginarios** $(-2;2)$ y $(-2;-2)$
Ecuaciones de las asíntotas (en el caso de corresponder) $$y=\frac{1}{2}x+1 \qquad \wedge \qquad y=-\frac{1}{2}x-1$$	
Excentricidad $$e=\frac{\sqrt{20}}{4} \quad \Rightarrow \quad e=\frac{\sqrt{5}}{2}$$	

b) Gráfico



4. a) Para poder hallar lo pedido, primero debemos completar cuadrados en la ecuación de la superficie:

$$-x^2+2.(y^2-2y)+z^2=A$$

$$-x^2+2.[(y-1)^2-1]+z^2=A \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{-x^2+2.(y-1)^2+z^2=A+2}$$

i) Para que la superficie represente un ***hiperboloide de una hoja*** debe cumplirse que:

$$A+2>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A>-2}$$

ii) Para que la superficie represente un ***hiperboloide de dos hojas*** debe cumplirse que:

$$A+2<0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A<-2}$$

b) Si $A=-2$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{-x^2+2.(y-1)^2+z^2=0}$ Es una ***superficie cónica elíptica de eje x***

La traza con el plano $\boldsymbol{x=2}$ es:

$$-2^2+2.(y-1)^2+z^2=0 \quad \Rightarrow \quad 2.(y-1)^2+z^2=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1} \ \boldsymbol{Elipse}$$

5. a) En el ***plano yz representa una Parábola de eje focal z***

En el ***espacio representa una Superficie Cilíndrica Parabólica de eje x***

b) Para obtener la ecuación de la superficie de revolución se debe reemplazar en la ecuación de la curva:

$$y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad z = 4.\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{z = 4x^2 + 4y^2}}$$

$$\boldsymbol{Es\ una\ cuádrica, es\ un\ Paraboloide\ Circular\ de\ eje\ z}$$

Resueltos Tema B – Primer Parcial FADU 30 de junio 2023

1. a) Para que se cumpla que $\vec{u} \perp \vec{v}$ ***debemos pedir que el producto escalar entre ellos sea nulo:***

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t;\ -3; t+1) \cdot (-3; 1; t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3.t - 3.1 + t.(t+1) = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{t = 3}} \quad \vee \quad \boxed{\boldsymbol{t = -1}}$$

b) Si $t = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = (2;\ -3; 3) \quad y \quad \vec{v} = (-3; 1; 2)$

Para hallar el ángulo α formado por ambos vectores debemos realizar:

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Hallamos lo pedido:

$$\vec{u}.\vec{v} = (2;\ -3; 3).(-3; 1; 2) = -6 - 3 + 6 = -3$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{22} \qquad y \qquad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Entonces:

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{22}.\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arc\cos\left(\frac{-3}{\sqrt{22}.\sqrt{14}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha \cong 99° \, 50' \, 33''}}$$

2. a) Para que el plano π sea perpendicular a la recta debe cumplir que:

El vector normal del plano sea paralelo al vector director de la recta.

Determinamos ambos vectores:

Normal del plano: $\vec{\boldsymbol{n}} = (\mathbf{1}; -\mathbf{3};\ \boldsymbol{k})$ **Director de la recta:** $\vec{\boldsymbol{d}} = (\mathbf{2}; -\mathbf{6};\ \mathbf{3})$

Como dos vectores paralelos tienen sus componentes homólogas proporcionales, podemos plantear:

$$\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{k}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{k}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{k = \frac{3}{2}}}$$

b) Si el punto de coordenadas $(-1; 3; 2)$ debe pertenecer al plano, debe verificar su ecuación, entonces planteamos:

$$-1 - 3.3 + 2k = 6 \quad \Rightarrow -1 - 9 + 2k = 6 \quad \Rightarrow \quad 2k = 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{k = 8}}$$

3. La ecuación de la cónica en forma polinómica es: $x^2 - 4y^2 + 6x - 7 = 0$

a) Comenzamos por completar cuadrados para expresarla en forma canónica:

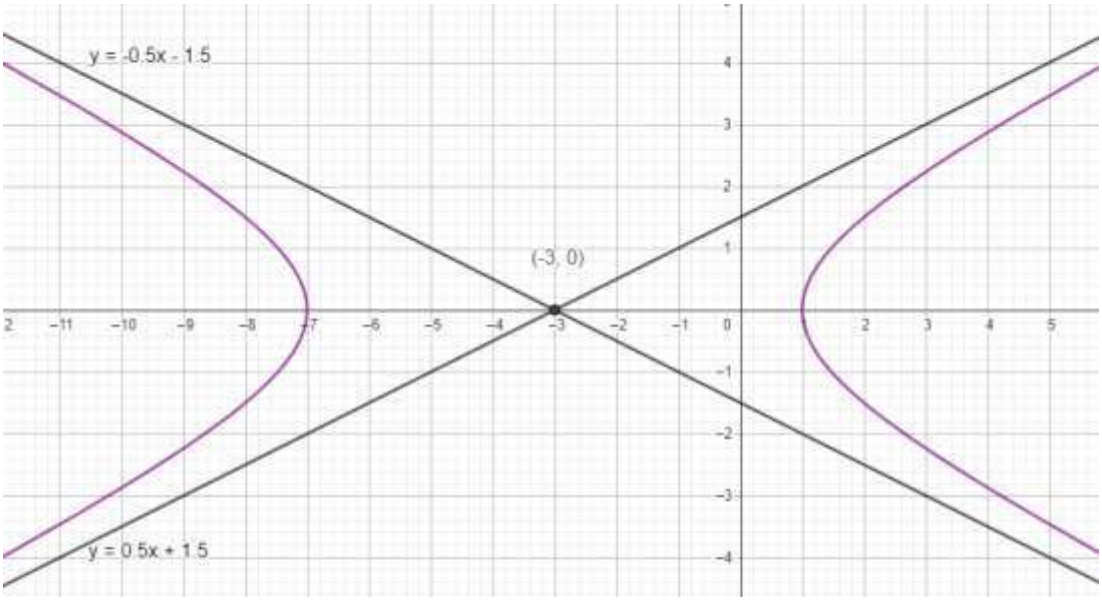
$$x^2 - 4y^2 + 6x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2 - 9 - 4y^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2 - 4y^2 = 16$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1}}$$

Ahora completamos el cuadro:

Ecuación Canónica $$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$$	**Coordenadas del centro o vértice (según corresponda)** $$C=(-3;0)$$
Coordenadas de los Focos **Foco 1** $\left(-3+2\sqrt{5};0\right)$ o $(1,47;0)$ **Foco 2** $\left(-3-2\sqrt{5};0\right)$ o $(-7,47;0)$	**Coordenadas de los vértices** **Reales** $(-7;0)$ y $(1;0)$ **Imaginarios** $(-3;2)$ y $(-3;-2)$
Ecuaciones de las asíntotas (en el caso de corresponder) $$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \wedge \quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$	
Excentricidad $$e=\frac{\sqrt{20}}{4} \quad \Rightarrow \quad e=\frac{\sqrt{5}}{2}$$	

b) Gráfico



4. a) Para poder hallar lo pedido, primero debemos completar cuadrados en la ecuación de la superficie:

$$2.(x^2-2x)-y^2+z^2=B$$

$$2.\left[(x-1)^2-1\right]-y^2+z^2=B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2.(x-1)^2-y^2+z^2=B+2}$$

i) Para que la superficie represente un ***hiperboloide de una hoja*** debe cumplirse que:

$$B+2>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B>-2}$$

ii) Para que la superficie represente un ***hiperboloide de dos hojas*** debe cumplirse que:

$$B+2<0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B<-2}$$

b) Si $B=-2$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{2.(x-1)^2-y^2+z^2=0}$ $\quad$ Es una ***superficie cónica elíptica de eje y***

La traza con el plano $\boldsymbol{y=2}$ es:

$$2.(x-1)^2-2^2+z^2=0 \quad \Rightarrow \quad 2.(x-1)^2+z^2=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1} \ \textit{Elipse}$$

5. a) En el ***plano xy representa una Parábola de eje focal x***

En el ***espacio representa una Superficie Cilíndrica Parabólica de eje z***

b) Para obtener la ecuación de la superficie de revolución se debe reemplazar en la ecuación de la curva:

$$y = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad x = 2.\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = 2y^2 + 2z^2}}$$

$$\boldsymbol{Es\ una\ cuádrica, es\ un\ Paraboloide\ Circular\ de\ eje\ x}$$

Resueltos Tema C – Primer Parcial FADU 30 de junio 2023

1. a) Para que se cumpla que $\vec{u} \perp \vec{v}$ ***debemos pedir que el producto escalar entre ellos sea nulo:***

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2n;\ -1; n-1) \cdot (1; 4; n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2n.1 - 1.4 + n.(n-1) = 0$$

$$n^2 - 3n - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{n = 4}} \quad \vee \quad \boxed{\boldsymbol{n = -1}}$$

b) Si $n = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = (-4;\ -1; 1) \quad y \quad \vec{v} = (1; 4; 2)$

Para hallar el ángulo α formado por ambos vectores debemos realizar:

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Hallamos lo pedido:

$$\vec{u}.\vec{v} = (-4;\ -1; 1).(1; 4; 2) = -4 - 4 + 2 = -6$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{18} \qquad y \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

Entonces:

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{-6}{\sqrt{18}.\sqrt{21}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arc\cos\left(\frac{-6}{\sqrt{18}.\sqrt{21}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha \cong 107° \ 58' \ 31''}}$$

2. a) Para que el plano π sea perpendicular a la recta debe cumplir que:

El vector normal del plano sea paralelo al vector director de la recta.

Determinamos ambos vectores:

Normal del plano: $\boldsymbol{\vec{n} = (t; -3;\ 1)}$ **Director de la recta:** $\boldsymbol{\vec{d} = (3; -6;\ 2)}$

Como dos vectores paralelos tienen sus componentes homólogas proporcionales, podemos plantear:

$$\frac{t}{3} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{t}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{t = \frac{3}{2}}}$$

b) Si el punto de coordenadas $(2; -1; 3)$ debe pertenecer al plano, debe verificar su ecuación, entonces planteamos:

$$2t - 3.(-1) + 3 = 4 \quad \Rightarrow 2t + 3 + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2t = -2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{t = -1}}$$

3. La ecuación de la cónica en forma polinómica es: $-4x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

a) Comenzamos por completar cuadrados para expresarla en forma canónica:

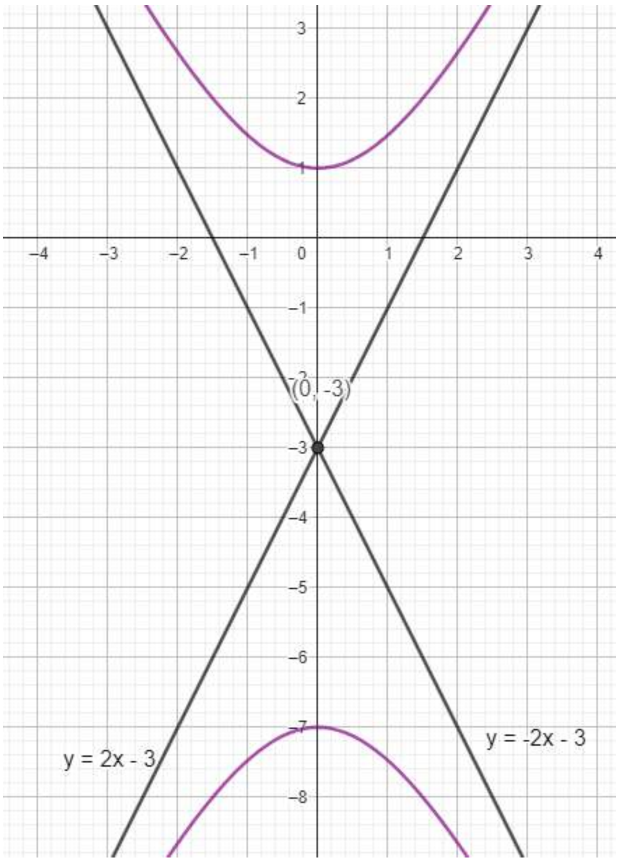
$$-4x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y+3)^2 - 9 - 4x^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad (y+3)^2 - 4x^2 = 16$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1}}$$

Ahora completamos el cuadro:

<table>
<tr><td>Ecuación Canónica
$$\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$$</td><td>Coordenadas del centro o vértice (según corresponda)
$$C=(0;-3)$$</td></tr>
<tr><td>Coordenadas de los Focos
Foco 1 $\left(0;\ -3+2\sqrt{5}\right)\ \ o\ \ \ (0;\ 1,47)$
Foco 2 $\left(0;\ -3-2\sqrt{5}\right)\ \ o\ \ \ (0;\ -7,47)$</td><td>Coordenadas de los vértices
Reales $(0;\ -7)\ \ y\ \ \ (0;1)$
Imaginarios $(2;\ -3)\ \ y\ \ (-2;\ -3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ecuaciones de las asíntotas (en el caso de corresponder)
$$y=2x-3 \qquad \wedge \qquad y=-2x-3$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Excentricidad
$$e=\frac{\sqrt{20}}{4} \quad \Rightarrow \quad e=\frac{\sqrt{5}}{2}$$</td></tr>
</table>

b) Gráfico



4. a) Para poder hallar lo pedido, primero debemos completar cuadrados en la ecuación de la superficie:

$$x^2-y^2+2.(z^2+2z)=C$$

$$x^2-y^2+2.[(z+1)^2-1]=C \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2.(z+1)^2-y^2+x^2=C+2}$$

i) Para que la superficie represente un ***hiperboloide de una hoja*** debe cumplirse que:

$$C+2>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C>-2}$$

ii) Para que la superficie represente un ***hiperboloide de dos hojas*** debe cumplirse que:

$$C+2<0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C<-2}$$

b) Si $C = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2.(z+1)^2 - y^2 + x^2 = 0}$ Es una ***superficie cónica elíptica de eje y***

La traza con el plano $\boldsymbol{y = 2}$ es:

$$2.(z+1)^2 - 2^2 + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.(z+1)^2 + x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{(z+1)^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 1} \ \textbf{\textit{Elipse}}$$

5. a) En el ***plano xz representa una Parábola de eje focal z***

En el ***espacio representa una Superficie Cilíndrica Parabólica de eje y***

b) Para obtener la ecuación de la superficie de revolución se debe reemplazar en la ecuación de la curva:

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad z = 2.\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 2x^2 + 2y^2}$$

$$\textbf{\textit{Es una cuádrica, es un Paraboloide Circular de eje z}}$$