UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL AVELLANEDA
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Examen Final – 27 de Marzo de 2019

Tema F-04-2019
Apellido y nombres del/la estudiante:..
Especialidad: ………...........................

1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b	Calificación

***NOTA**: La condición para aprobar el Examen Final es tener bien cinco de las ocho actividades a resolver, debiendo haber al menos una de cada uno de los ítems designados del 1 al 4. Presente en las hojas que entrega el desarrollo completo de todos los ítems, para justificar sus respuestas. No haga el examen con lápiz.*

BLOQUE TEMÁTICO 1: ÁLGEBRA VECTORIAL – ÁLGEBRA MATRICIAL

1.a) Proponga un vector de R^3 que no tenga ninguna componente nula y cuya norma sea 6. Luego, investigue para qué valor de $a \in R$ el vector propuesto es ortogonal al vector $\vec{v} = (3, a, -1)$

1°) Observemos que, entre otras infintas combinaciones: $36 = \begin{cases} 1+4+31 \to \vec{u}_1 = \left(1;2;\sqrt{31}\right) \\ 4+9+23 \to \vec{u}_2 = \left(2;3;\sqrt{23}\right) \\ 2+9+25 \to \vec{u}_3 = \left(\sqrt{2};3;5\right) \end{cases}$

2°) elegimos $\vec{u}_3 = \left(\sqrt{2};3;5\right) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{2};3;5\right) \bullet (3;a;-1) = 0 \Rightarrow$

$$3\sqrt{2} + 3a - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{5-3\sqrt{2}}{3}} \vee \boxed{a = \frac{5}{3} - \sqrt{2}}$$

1.b) Para la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ b & c & -8 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ proponga valores reales de las variables a, b, c, d, e, f para que dicha matriz sea: 1.- Simétrica 2.- Antisimétrica 3.- Triangular superior 4.- Regular o no singular. Escriba en todos los casos las matrices construidas y justifique por qué cumplen con las condiciones que el problema establece.

1. Simétrica: aquella matriz que es igual a su traspuesta; los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, es decir: $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \neq j$; para la matriz *A* tenemos:

$$\begin{cases} a_{21} = a_{12} \Rightarrow b = 1 \\ a_{31} = a_{13} \Rightarrow d = -2 \\ a_{32} = a_{23} \Rightarrow e = -8 \end{cases}$$

Los elementos que pertenecen a la diagonal principal pueden tomar cualquier valor real, por tanto una matriz *A*, a:

partir de $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & c & -8 \\ -2 & -8 & f \end{pmatrix}$ es $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -8 \\ -2 & -8 & 7 \end{pmatrix}$

2. Antisimétrica: todos los elementos de la diagonal principal valen 0, y todo par de elementos simétricos respecto de dicha diagonal son reales opuestos entre sí; es decir: $\begin{cases} a_{ij} = 0 & \forall i = j \\ a_{ij} = -a_{ji} & \forall i \neq j \end{cases}$

1°) $a = c = f = 0$

2°) $\begin{cases} a_{21} = -a_{12} \Rightarrow b = -1 \\ a_{31} = -a_{13} \Rightarrow d = 2 \\ a_{32} = -a_{23} \Rightarrow e = 8 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -8 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

3. Triangular superior: toda matriz cuadrada en la cual, **todos** los elementos que están debajo de la diagonal superior valen cero, es decir: $a_{ij} = 0 \ \ \forall i > j$

$b = d = e = 0$ mientras que *a*, *c* y *f* pueden tomar cualquier valor real incluyendo el cero;

A partir de $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & c & -8 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ por ejemplo, tenemos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Regular o no singular: su determinante es distinto de cero;

1°) Software Mathematics mediante obtenemos:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ b & c & -8 \\ d & \boldsymbol{e} & f \end{pmatrix}\right) = acf + 8\boldsymbol{e}a - bf - 2\boldsymbol{e}b + 2cd - 8d$$

2°) Dicho determinante puede obtenerse por ejemplo mediante Regla de Laplace desarrollando por la primera columna:

$$|A| = a \cdot \begin{vmatrix} c & -8 \\ e & f \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ e & f \end{vmatrix} + d \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ c & -8 \end{vmatrix} = a \cdot (cf + 8e) - b \cdot (f + 2e) + d \cdot (-8 + 2c)$$

3°) *A* será regular (no singular) si se cumplen las siguientes condiciones:

#1) *a*, *b* y *d* no pueden valer simultáneamente 0
#2) $cf + 8e$, $f + 2e$ y $2c - 8$ tampoco pueden anularse simultáneamente;

Cualquier matriz *A* que cumpla estas dos condiciones al mismo tiempo, será regular, es decir $|A| \neq 0$

4°) Por ejemplo si $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow d \neq 0 \wedge 2c - 8 \neq 0 \Rightarrow 2c \neq 8 \Rightarrow c \neq 4$
Y así obtenemos, por ejemplo (una entre infinitas):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \cdot (-8 + 10) = 4 \neq 0$$

BLOQUE TEMÁTICO 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA

2.a) Construya una recta que esté contenida en el plano $\alpha: 4x - y + 2z - 6 = 0$ y obtenga la distancia de esa recta al origen de coordenadas.

1°) el camino mas sencillo consiste en encontrar dos puntos cualesquiera del plano y luego escribir la ecuación de la recta que pasa por ellos; un truco sencillo es elegir dos componentes nulas y hallar la tercera:

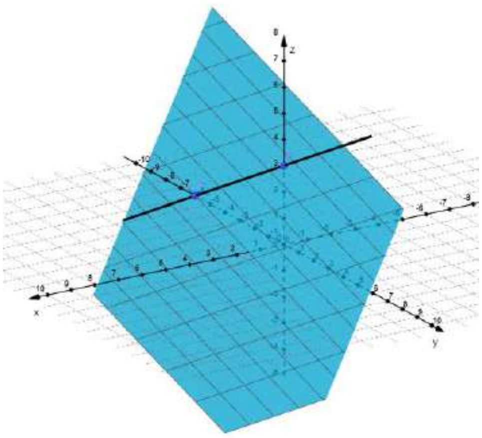
así por ejemplo si $x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow 2z - 6 = 0 \Rightarrow 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow \boxed{P_1(0;0;3)}$

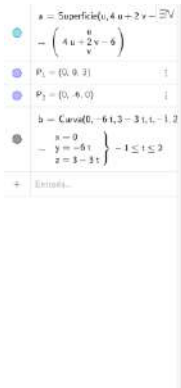
y, si α $x = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow -y - 6 = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow \boxed{P_2(0;-6;0)}$

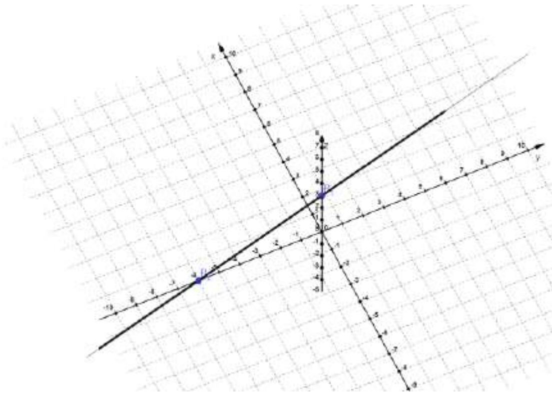
2°) un director de dicha recta será $\vec{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = (0;-6;0) - (0;0;3) = (0;-6;-3)$

y así: $r:(x;y;z) = (0;0;3) + \lambda \cdot (0;-6;-3)$

3°) en Geogebra vemos una vista 3D y otra en la cual se observa que la recta efectivamente está incluída en el plano:



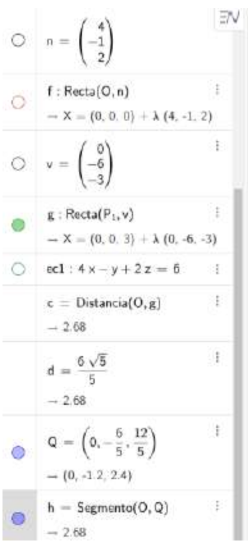


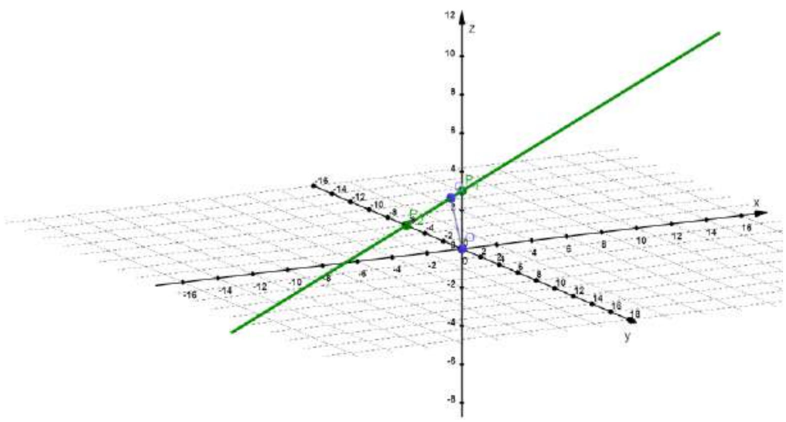


4°) en $\mathbb{R}^3$ la distancia entre una recta ***r*** y un punto que no pertenece a ella, el origen ***O*** aquí, es:

$$d_{O\to r} = \frac{\left\|\overrightarrow{P_1O} \times \vec{d}_r\right\|}{\left\|\vec{d}_r\right\|} = \frac{\|(0;0;-3)\times(0;-6;-3)\|}{\|(0;-6;-3)\|} = \frac{\|(-18;0;0)\|}{\sqrt{36+9}} = \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{18}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Geogebra confirma nuestro cálculo:





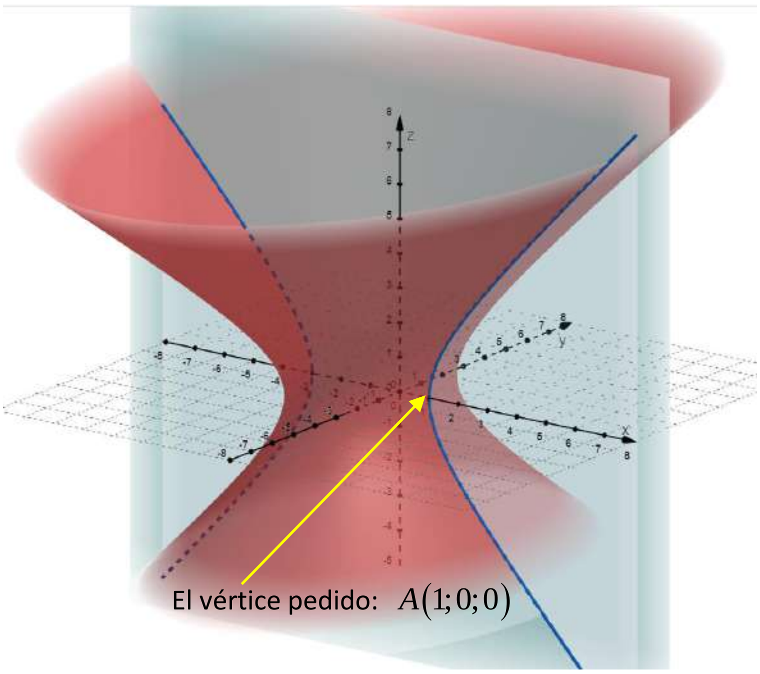
2.b) Proponga la ecuación de un hiperboloide de una hoja que verifique que su intersección con el plano xz es una hipérbola equilátera uno de cuyos vértices es el punto $A(1;0;0)$

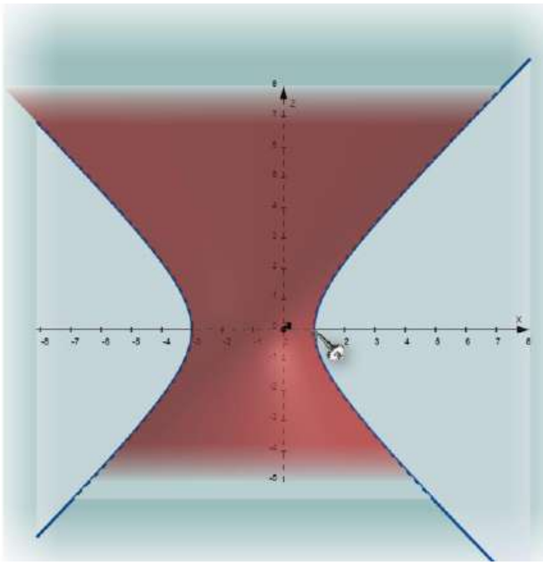
1°) La ecuación general de un hiperboloide de una hoja es: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$
o sea, tiene dos coeficientes cuadráticos positivos y uno negativo, el cual indica el eje de simetría del hiperboloide.

2°) debe cumplir que su intersección con el plano $y=0$ es una hipérbola equilátera, y uno de sus vértices es $A(1;0;0)$ por lo cual nuestro hiperboloide responderá a la forma general:

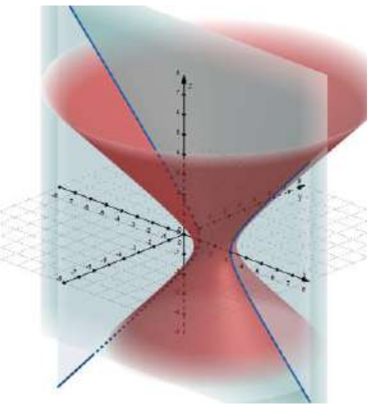
$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ y además, para que la hipérbola sea equilátera debe cumplirse: $a=c$; $\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$ y, entonces, por ejemplo tenemos: $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$

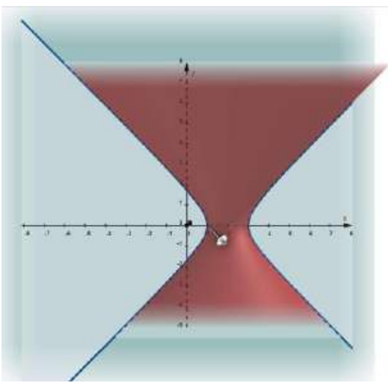
Geogebra nos muestra el hiperboloide interceptado por el plano $y=0$, y la vista frontal desde el eje ***y***:





Hay obvio, infinidad de ejemplos; veamos otro: $(x-2)^2+y^2-z^2=1$





BLOQUE TEMÁTICO 3: ÁLGEBRA LINEAL

3.a) Se sabe que $T: V \rightarrow V$ es una transformación lineal que cumple que:

$$T(\vec{a}+2\vec{b}) = 3\vec{a}-\vec{b} \text{ y } T(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}-4\vec{b}$$

Se pide, determine, explicando los procedimientos y propiedades que utiliza, el valor de $T(\vec{a})$ y el de $T(\vec{b})$

1°) aplicamos las dos leyes fundamentales de las T.L.:

dados $\vec{u} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u})+T(\vec{v}) \\ T(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u}) \end{cases}$

2°) $\begin{cases} T(\vec{a}+2\vec{b}) = T(\vec{a})+2\cdot T(\vec{b}) \Rightarrow T(\vec{a})+2\cdot T(\vec{b}) = 3\vec{a}-\vec{b} & [1] \\ T(\vec{a}-\vec{b}) = T(\vec{a})-T(\vec{b}) \Rightarrow T(\vec{a})-T(\vec{b}) = 2\vec{a}-4\vec{b} & [2] \end{cases}$

3°) multiplicamos la segunda expresión por (-1) y la sumamos a la primera:

$$\begin{cases} T(\vec{a})+2\cdot T(\vec{b}) = 3\vec{a}-\vec{b} \\ -T(\vec{a})+T(\vec{b}) = -2\vec{a}+4\vec{b} \end{cases} \Rightarrow 3\cdot T(\vec{b}) = \vec{a}+3\vec{b} \Rightarrow \boxed{T(\vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}}$$

4°) finalmente en [2], elegida arbitrariamente, reemplazamos $T(\vec{b})$ para hallar $T(\vec{a})$:

$$T(\vec{a})-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}\right) = 2\vec{a}-4\vec{b} \Rightarrow T(\vec{a}) = 2\vec{a}-4\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b} \Rightarrow \boxed{T(\vec{a}) = \frac{7}{3}\vec{a}-3\vec{b}}$$

3.b) Proponga una transformación lineal $F: R^3 \rightarrow R^2$ en la que $Nu(T)$ tenga dimensión 1 y que $\vec{u} = (1,2)$ pertenezca a $Im(T)$. Obtenga su expresión analítica.

1°) elegimos arbitrariamente $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \wedge T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, agregamos el tercer vector canónico a otra imagen:

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

2°) planteamos la combinación lineal genérica: $a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=x \\ b=y \\ c=z \end{cases}$

3°) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = T\left[a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = T\left[a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]+T\left[b\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]+T\left[c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\left[a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=a\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\cdot T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+3z\\2y-4z\end{pmatrix}}$$

la cual verifica: $\begin{cases}T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3\cdot 0\\2\cdot 0-4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3\cdot 0\\2\cdot 1-4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3\cdot 1\\2\cdot 0-4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\end{cases}$

4°) Un camino muchísimo mas simple: de acuerdo al teorema de la dimensión, sabemos que
$dim(NuT)+\dim(\operatorname{Im}T)=\dim(DomT)\Rightarrow 1+\dim(\operatorname{Im}T)=3\Rightarrow\boxed{\dim(\operatorname{Im}T)=2}$

O sea que al ser la dimensión del núcleo 1 se trata de una recta y basta pensarla como la intersección de 2 planos que pasan por el origen, por ejemplo $x+y=0$ con $x-z=0$

Basta pensar cualquier T.L. tal que $T\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\wedge T\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ por ejemplo:

$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-z\end{pmatrix}$ tal que $T\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-1)\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\wedge T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

MISCELÁNEAS

Brinde, justificando siempre su respuesta:

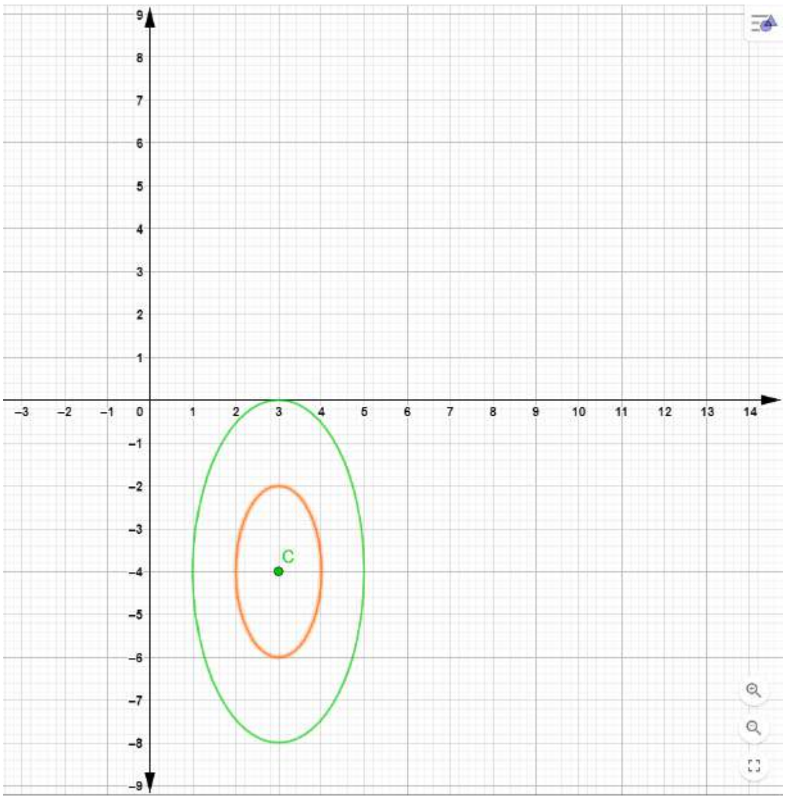
4a) La ecuación canónica de una cónica cuyo semieje mayor esté orientado en la dirección del eje de ordenadas, cuya longitud sea el doble que el semieje menor, y que tenga al punto $C(3,-4)$ como centro. Identifique de qué cónica se trata y haga una representación gráfica aproximada.

1°) Con las condiciones pedidas puede tratarse únicamente de una elipse;

2°) como el semieje mayor debe estar orientado en la dirección del eje de ordenadas, el eje focal entonces es paralelo a dicho eje y pasa por el punto de abscisa $x=3$; un ejemplo simple es:

$$\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(y+4)^2}{4^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$ u, otro mas simple:

$$\frac{(x-3)^2}{1^2}+\frac{(y+4)^2}{2^2}=1 \Rightarrow (x-3)^2+\frac{(y+4)^2}{4}=1$$ cuyas representaciones en Geogebra son:



4b) Un subespacio vectorial de R^3 cuyo complemento ortogonal es geométricamente un plano que contiene a los puntos $A(0;1;3) y\ B(1;-4;0)$

1°) el complemento ortogonal del subespacio pedido es un plano que pasa por los puntos dato *A* y *B* y lógicamente, también pasa por el origen.

2°) lo mas sencillo aquí es utilizar la ecuación implícita o general del plano, con producto mixto; desde el origen armamos tres vectores coplanares $\overrightarrow{OP}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{OA}=(0;1;3)$, $\overrightarrow{OB}=(1;-4;0)$ cuyo producto mixto es nulo:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ x_A-0 & y_A-0 & z_A-0 \\ x_B-0 & y_B-0 & z_B-0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Este determinante se resuelve por los métodos conocidos y obtenemos: $12x+3y-z=0$

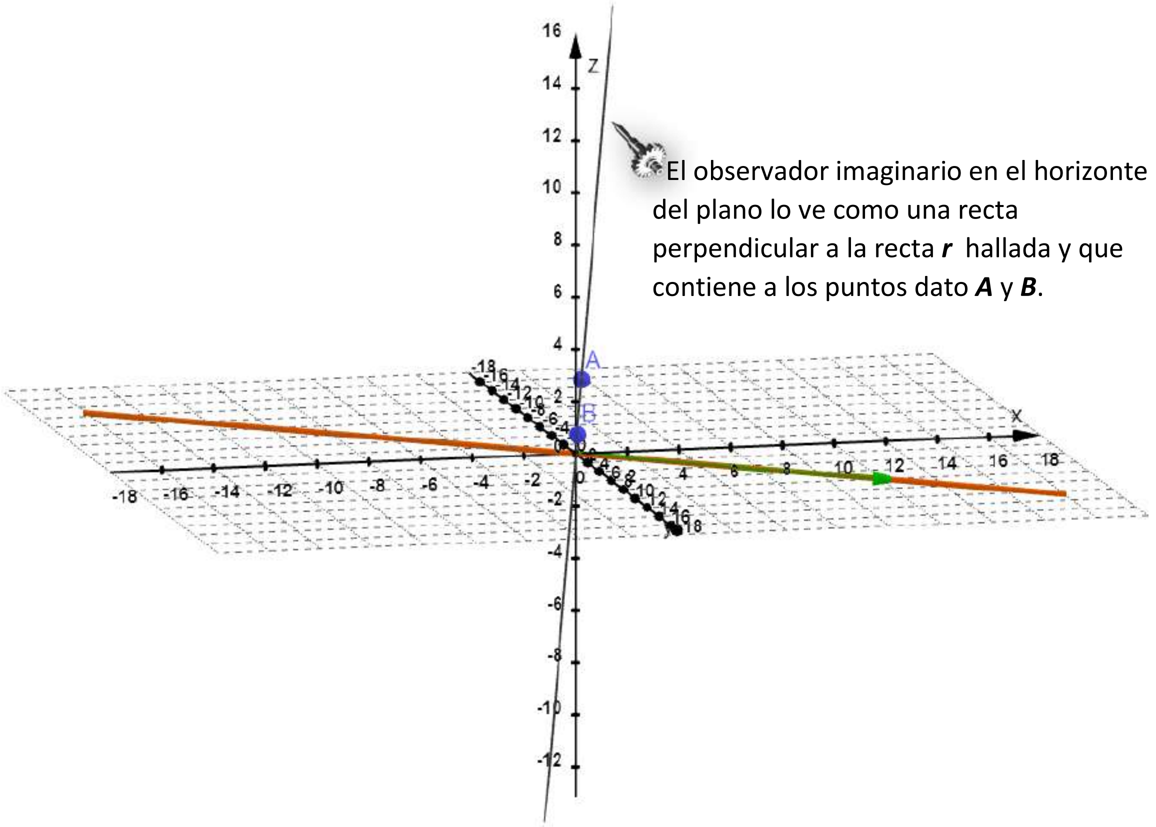
3°) el complemento ortogonal de un plano en $\mathbb{R}^3$ es una recta que pasa por el origen perpendicular al plano, por lo cual su vector director será paralelo al normal del plano $\vec{n}=(12;3;-1) \Rightarrow \vec{d}=\lambda\cdot(12;3;-1)$

Concluímos que el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ pedido es: $r: \boxed{(x;y;z)=\lambda\cdot(12;3;-1)}$

Analíticamente obtenemos la expresión del SEV: $\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{3}=-z\right\}$ o bien

$\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x;y;z)=\lambda\cdot(12;3;-1)\right\}$

4°) Geogebra nos muestra ambos subespacios y los puntos dato:



En otra vista: