ÁLGEBRA y GEOMETRÍA - 2016

Resolución Primer Parcial - Primera Instancia

Ejercicio 1. Determinar la matriz X que verifica: A.X – B = C.D siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

A. **X** – B = C. D

A. **X** = C. D + B

A^{-1}. A. **X** = A^{-1}. (C. D + B)

I. **X** = A^{-1}. (C. D + B)

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right)$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

X = A^{-1}. (C. D + B)

A^{-1}. A= I

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.A^{-1} = I

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. La siguiente es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p \\ 0 \\ p-m \end{matrix}\right)$$

. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si $p = m = 3$ entonces una solución del sistema es $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $p \neq m$ entonces el sistema es incompatible.

c) Si $p = 0$ entonces el sistema es compatible para todo valor de m.

Resolución:

a) **VERDADERA**

Reemplazando $p = m = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ; \quad \begin{array}{l} x+2y=3 \\ y+3z=0 \end{array}$$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Entonces $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -3t \\ z = t \quad t \in \Re \end{cases}$ Si t = 1, $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$

b) **VERDADERA**

Reemplazando $p \neq m$, se observa que $p - m \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & p \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-m \end{pmatrix}$$ Absurdo

Sistema Incompatible (sin solución)

c) FALSA

Reemplazando p = 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

Si m = 0 *Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)*

Si $m \neq 0$ Sistema Incompatible (sin solución)

Ejercicio 3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$.

Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) A es Inversible para todo valor de t real.

b) Para t = 0, el SELH A.x = **0** admite solución No trivial.

c) Para t = **−**1, el SEL A.x = $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es Incompatible.

Resolución:

a) **FALSA.**

$$\begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} t & 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t-1 & 0 & 1 & t-1 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 & 0 \end{array}\right| = t\,.(t-1).(t+1) = 0$$

Si t = 0; t = 1 y t = -1 el det. A = 0

A es Inversible para $t \neq 0$; $t \neq 1$ y $t \neq -1$ (det. $A \neq 0$).

b) **VERDADERA**

Reemplazando t = 0:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Sistema compatible indeterminado. Solución No trivial.

c) **FALSA.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} x-2y=0 \\ z=0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = t \\ z = 0 \quad t \in \Re \end{cases} \qquad \text{Si } t = -2, \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sean los vectores u = 2i **–** j + 3k , v = (1, 0, 4) **y** w = **–** i + j + 2k. Determinar,

a) el ángulo entre los vectores u y v.

b) un vector unitario en la dirección de w.

c) un vector ortogonal tanto a v como a w.

d) el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores v y w.

e) el vector $proy_v$ u .

Resolución:

a) $\cos\theta = \dfrac{u.v}{\|u\|\|v\|}$

$$\|u\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}$$
$$\|u\| = \sqrt{4+1+9}$$
$$\|u\| = \sqrt{14}$$

$$\|v\| = \sqrt{1^2+0^2+4^2}$$
$$\|v\| = \sqrt{1+16}$$
$$\|v\| = \sqrt{17}$$

$$\cos\theta = \frac{(2,-1,3).(1,0,4)}{\|14\|\|17\|}$$

$$\cos\theta = \frac{(2,-1,3).(1,0,4)}{\sqrt{14}.\sqrt{17}}$$

$$\cos\theta = \frac{2.1+(-1).0+3.4}{\sqrt{14}.\sqrt{17}}$$

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{238}}$$

$$\cos\theta \cong 0.907$$

$$\theta \cong \arccos 0.907$$

$$\theta \cong 24.84^o$$

El ángulo entre los vectores u y v es $\theta \cong 24.84^o$.

b) $w_{unitario} = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{x}{\|w\|}, \frac{y}{\|w\|} \frac{z}{\|w\|}\right)$

$$\|w\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}$$
$$\|w\| = \sqrt{1+1+4}$$
$$\|w\| = \sqrt{6}$$

$$w_{unitario} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Un vector unitario en la dirección de w es $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

c) $p = v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0-4)i - [2-(-4)]j + (1-0)k$

$$p = (-4)i + 6j + 1k = (-4, 6, 1)$$

Un vector ortogonal tanto a v como a w es $(-4, 6, 1)$**.**

d) $\|v \times w\| = \|(-4, 6, 1)\|$

$$\|v \times w\| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 1^2}$$
$$\|v \times w\| = \sqrt{16+36+1}$$
$$\|v \times w\| = \sqrt{53}$$

El área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores v y w es $\sqrt{53}$ **uA.**

e) $\text{vector proy}_v\ u = \frac{u.v}{\|v\|^2}.v$

$$\text{vector proy}_v\ u = \frac{14}{\left(\sqrt{17}\right)^2}.(1, 0, 4)$$

$$\text{vector proy}_v\ u = \frac{14}{17}.(1, 0, 4)$$

$$\text{vector proy}_v\ u = \left(\frac{14}{17}, 0, \frac{56}{17}\right)$$

El vector proy$_v$ u es $\left(\frac{14}{17}, 0, \frac{56}{17}\right)$**.**

Ejercicio 5. Considerar la recta L: (x , y , z) = (1 , 4 , 0) + t (–1 , 1 , 1) y el plano π: x – y + z = –3. Indicar si las afirmaciones siguientes son Verdaderas ó Falsas. Justificar.

a) El punto (1,4,0) pertenece a L y a π .

b) La recta L es perpendicular a π .

c) El plano π_1: –3x + 3y – 3z = 4 es paralelo al plano a π.

d) El vector director de L es un vector unitario.

Resolución:

a) **VERDADERA**

Análisis de la recta.

L: $(x, y, z) = \underbrace{\boxed{(1, 4, 0)}}_{\text{Pertenece a la recta}} + t(-1, 1, 1)$

Otra opción:

Ecuación parametrica de la recta $\begin{cases} x = 1 - y \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$

Reemplazado el punto en la recta $\begin{cases} 1 = 1 - y \\ 4 = 4 + t \text{ para } t = 0 \text{ se satisface la igualdad.} \\ 0 = t \end{cases}$

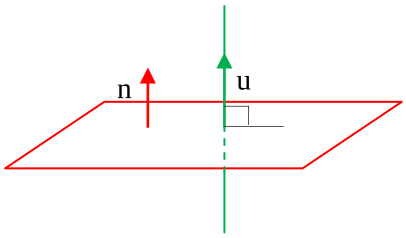
Análisis del plano.

π: $x - y + z = -3.$

$1 - 4 + 0 = -3.$

$-3 = -3.$

Reemplazando el punto en el plano se satisface la igualdad.



b) **FALSA**

$u = (-1, 1, 1)$

$n = (1, -1, 1)$

Los vectores n y u no son proporcionales, por lo tanto no son paralelos.

c) **VERDADERA**

π: $x - y + z = -3.$

π_1: $-3x + 3y - 3z = 4$

$$\frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{4}$$

Los vectores normales son proporcionales, no así los términos independientes.

d) **FALSA**

$u = (-1, 1, 1)$

$$\|u\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$\|u\| = \sqrt{1 + 1 + 1}$$

$$\|u\| = \sqrt{3} \neq 1$$

Ejercicio 6. Determinar si los siguientes pares de rectas se intersectan, son paralelas o son alabeadas, en el caso de ser paralelas analizar si son coincidentes:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-4t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad (x, y, z) = (1, 3, 7) + \lambda(3, 0, 1)$$

Resolución:

Se analiza si son paralelas.

$u_1 = (1, -4, 1) \qquad u_2 = (3, 0, 1)$

Los vectores directores no son proporcionales, por lo tanto no son paralelas.

Se analiza si se intersectan.

$$r_1 \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-4t \\ z = t \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 3 \\ z = 7+\lambda \end{cases}$$

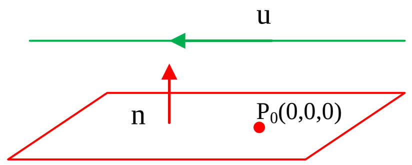
$$\begin{aligned} 1+t &= 1+3\lambda \\ 3-4t &= 3 \\ t &= 7+\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t-3\lambda = 0 \\ -4t = 0 \\ t-\lambda = 7 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \text{Absurdo}$$

El sistema es incompatible, por lo tanto no se intersectan.

Como las rectas no son paralelas ni se intersectan en un punto, son ALABEADAS.

Ejercicio 7. Encontrar la ecuación de un plano que pase por el origen y sea paralelo a la recta de ecuación $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{-1}$.



Resolución:

$$\begin{aligned} &n \perp u \\ &n.u = 0 \\ &(a, b, c).(-1, 2, -1) = 0 \\ &\text{Si } n = (1,1,1) \text{ entonces } (1,1,1).(-1,2.-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_0P} &= (x, y, z) - (0,0,0) \\ \overline{P_0P} &= (x, y, z) \end{aligned}$$

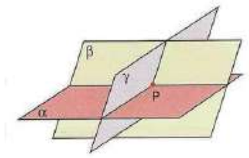
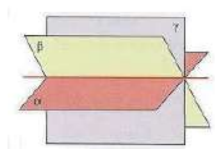
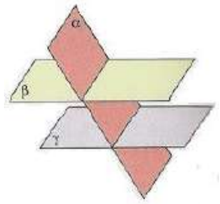
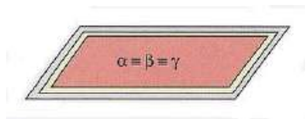
$$\begin{aligned} &\overline{P_0P}\,.\,n = 0 \\ &(x, y, z).(1,1,1) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x + y + z = 0}$$

Ejercicio 8 . Sea A.x = b un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Completar el siguiente cuadro, de acuerdo a los datos que figuran en él.

Resolución:

Situación Geométrica	Tipo de Sistema	det(A) = 0 ó det(A) ≠ 0	A es Inversible SI / NO	El SEL homogéneo asociado tiene solución trivial SI/NO	A es equivalente por filas a la I_3
	Compatible Determinado	det(A) ≠ 0	SI	SI	SI
	Compatible Indeterminado	det(A) = 0	NO	NO	NO
	Incompatible	det(A) = 0	NO	NO	NO
	Compatible Indeterminado	det(A) = 0	NO	NO	NO