UNIVERSIDAD CATOLICA DE SALTA
Facultad Economía y Administración
Materia: MATEMATICA I
Modalidad: No presencial

RESOLUCION EVALUACION Nº 1

TURNO Nº 1:

1- Dada: $f(x)=x^2+2x-3$ determinar:

a) Dominio e Imagen

Dominio: Al ser una función polinomial, el dominio no tendrá restricciones: $Df=\{\forall x\in R\}$

Imagen: Se debe completar cuadrados:

$$y=x^2+2x+(1)^2-(1)^2-3 \rightarrow y=(x+1)^2-4 \rightarrow x=-1\pm\sqrt{y+4}$$

Luego la imagen será:

$If=\{\forall y\in R/ y\geq -4\}$

b) Inversa, en caso de ser necesario restrinja el dominio.

Inyectiva: Planteamos: $f(x_1)=f(x_2)$, entonces: $\begin{cases} f(x_1)=(x_1+1)^2-4 \\ f(x_2)=(x_2+1)^2-4 \end{cases}$

$(x_1+1)^2-4=(x_2+1)^2-4 \rightarrow (x_1+1)^2=(x_2+1)^2 \rightarrow$ se genera el módulo: $\sqrt{(x_1+1)^2}=\sqrt{(x_2+1)^2}$ entonces: $|x_1+1|=|x_2+1|$

Se deben analizar los módulos:

$|x_1+1|=\begin{cases} (x_1+1) & si \quad x_1\geq -1 \quad (a) \\ -(x_1+1) & si \quad x_1<-1 \quad (b) \end{cases}$ $\qquad |x_2+1|=\begin{cases} (x_2+1) & si \quad x_2\geq -1 \ (c) \\ -(x_2+1) & si \quad x_2<-1 \ (d) \end{cases}$ haciendo las combinaciones posibles:

$$* \left.\begin{array}{lll} (a)\ y\ (c) & x_1+1=x_2+1 & \rightarrow x_1=x_2 \\ (a)\ y\ (d) & x_1+1=-x_2-1 & \rightarrow x_1=-2-x_2 \\ (b)\ y\ (c) & -x_1-1=x_2+1 & \rightarrow x_1=-2-x_2 \\ (b)\ y\ (d) & -x_1-1=-x_2-1 & \rightarrow x_1=x_2 \end{array}\right\} concluimos: \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1=-2-x_2 \end{cases}$$

con lo que se concluye que no es infectiva. Se debe restringir el dominio $D_R f=\{\forall x\in R/ x\geq -1\}$

De esta manera solo se podrán considerar las expresiones comprendidas en este intervalo: ***(a) y (c)*** con lo cual se llega a: $x_1=x_2$

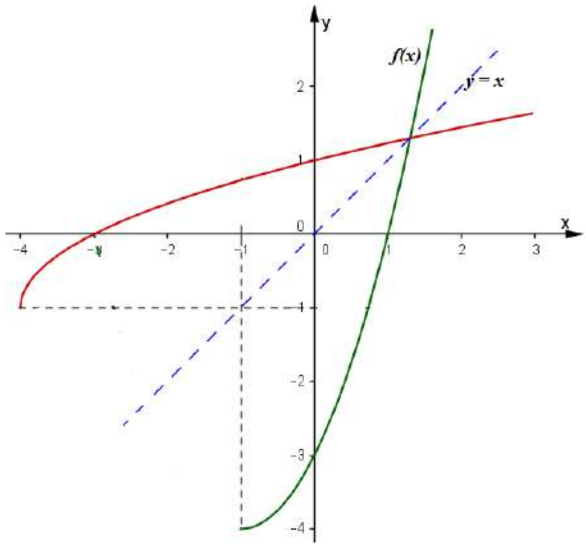
Sobreyectiva: Si tenemos en cuenta que la imagen está restringida por el dominio, la función será sobreyectiva, no obstante se puede verificar: $f(x)=(x+1)^2-4$ como $x=-1\pm\sqrt{y+4}$ tendremos:

$$f(x)=\left(-1\pm\sqrt{y+4}+1\right)^2-4 \rightarrow f(x)=\left(\pm\sqrt{y+4}\right)^2-4 \rightarrow f(x)=(y+4)-4 \rightarrow$$

$f(x)=y$

La inversa será: $f^{-1}(x)=-1+\sqrt{x+4}$

c) Gráfica de la función con su inversa.-



2- Calcular: $\lim_{x\to a}\frac{x.\sqrt{x}-a.\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ Se multiplica y divide por el conjugado del numerador y del

denominador: $\lim_{x\to a}\frac{\left(x.\sqrt{x}-a.\sqrt{a}\right)\left(x.\sqrt{x}+a.\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(x.\sqrt{x}+a.\sqrt{a}\right)}$ luego se puede expresar:

$\lim_{x\to a}\frac{\left[\left(x.\sqrt{x}\right)^2-\left(a.\sqrt{a}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2\right]\left(x.\sqrt{x}+a.\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\left[x^3-a^3\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left[x-a\right]\left(x.\sqrt{x}+a.\sqrt{a}\right)}$ luego en el numerador se factoriza

por la diferencia de las bases $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^2+xa+a^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(x.\sqrt{x}+a.\sqrt{a}\right)}$ cancelando:

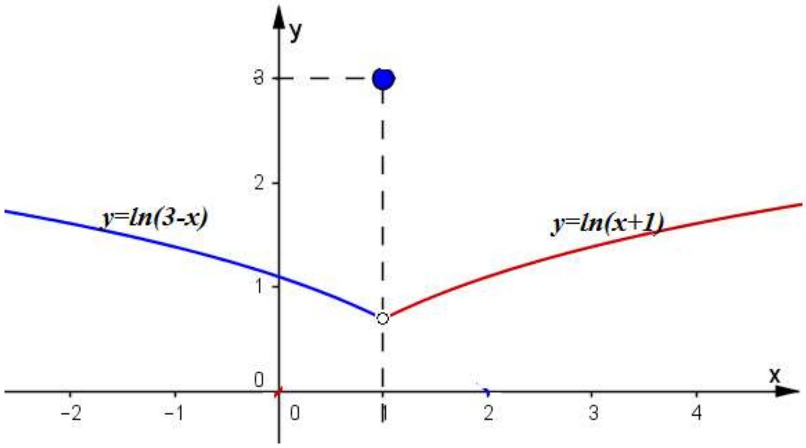
$\lim_{x\to a}\frac{\left(x^2+xa+a^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(x.\sqrt{x}+a.\sqrt{a}\right)}$ se valúa para saber si se salva la indeterminación:

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(x^2+xa+a^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(x.\sqrt{x}+a.\sqrt{a}\right)}=\frac{\left(a^2+a.a+a^2\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a}\right)}{\left(a.\sqrt{a}+a.\sqrt{a}\right)}=\frac{3a^2.2\sqrt{a}}{2a\sqrt{a}}=3a$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x.\sqrt{x}-a.\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=3a$$

3- Dada: $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1) & si \quad x>1\\ 3 & si \quad x=1\\ \ln(3-x) & si \quad x<1\end{cases}$

a) Graficar la función dada



b) Analizar la continuidad en $x_0 = 1$

$i)\quad f(1) = 3$

$ii)\quad \lim_{x\to 1^+} \ln(x+1) = \ln 2 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 1^-} \ln(3-x) = \ln 2 \quad \to \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$

$iii)\ f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$

c) Redefinir en caso de ser necesario

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & si \quad x > 1 \\ \ln 2 & si \quad x = 1 \\ \ln(3-x) & si \quad x < 1 \end{cases}$$

4- Dada: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x - 3}$ determinar:

a) Asíntotas

VERTICALES: se debe analizar en $x = 1 \quad y \quad x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+3)} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+3)} = -\infty \end{array}\right\} En \quad x = 1 \ \exists \ Asíntota \quad vertical$$

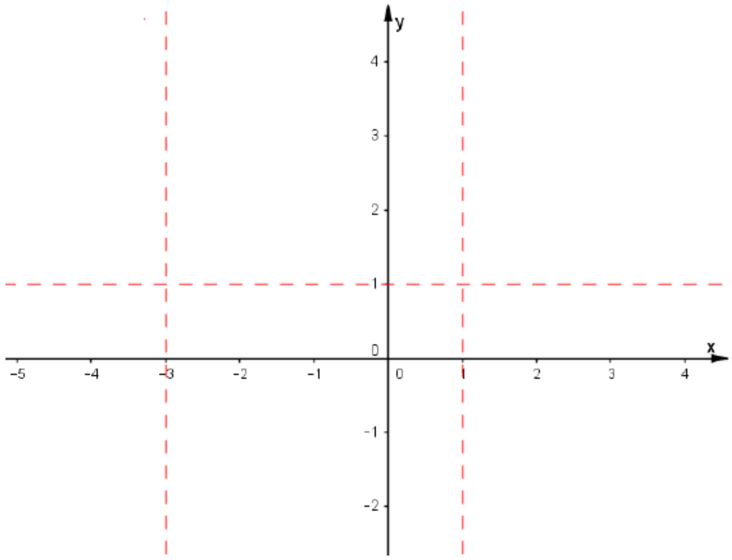
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -3^+} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+3)} = -\infty \\ \lim_{x\to -3^-} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+3)} = +\infty \end{array}\right\} En \quad x = -3 \ \exists \ Asíntota \quad vertical$$

b) ASINTOTA HORIZONTAL

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$ existe Asíntota horizontal en $y = 1$

ASINTOTA OBLICUA: No tiene

c) Gráfica las asíntotas determinadas.-



TURNO Nº 2:

1- Dada: $f(x)=x^2-2x-3$ determinar:

a) Dominio e Imagen

Dominio: Al ser una función polinomial, el dominio no tendrá restricciones: $Df=\{\forall x\in R\}$

Imagen: Se debe completar cuadrados:

$$y=x^2-2x+(-1)^2-(-1)^2-3\ \rightarrow y=(x-1)^2-4\ \rightarrow x=1\pm\sqrt{y+4}$$

Luego la imagen será:

$If=\{\forall y\in R/\,y\geq -4\}$

A) Inversa, en caso de ser necesario restrinja el dominio.

Inyectiva: Planteamos: $f(x_1)=f(x_2)$, entonces: $\begin{cases} f(x_1)=(x_1-1)^2-4 \\ f(x_2)=(x_2-1)^2-4 \end{cases}$

$(x_1-1)^2-4=(x_2-1)^2-4\ \rightarrow\ (x_1-1)^2=(x_2-1)^2\ \rightarrow$ se genera el módulo: $\sqrt{(x_1-1)^2}=\sqrt{(x_2-1)^2}$ entonces: $|x_1-1|=|x_2-1|$

Se deben analizar los módulos:

$|x_1-1|=\begin{cases} (x_1-1) & si\quad x_1\geq 1\ (a) \\ -(x_1-1) & si\quad x_1<1\ (b) \end{cases}$ $\quad |x_2-1|=\begin{cases} (x_2-1) & si\quad x_2\geq 1\ (c) \\ -(x_2-1) & si\quad x_2<1\ (d) \end{cases}$ haciendo las combinaciones posibles:

$$*\ \left.\begin{array}{lll} (a)\ y\ (c) & x_1-1=x_2-1 & \rightarrow x_1=x_2 \\ (a)\ y\ (d) & x_1-1=-x_2+1 & \rightarrow x_1=2-x_2 \\ (b)\ y\ (c) & -x_1+1=x_2-1 & \rightarrow x_1=2-x_2 \\ (b)\ y\ (d) & -x_1+1=-x_2+1 & \rightarrow x_1=x_2 \end{array}\right\}\ concluimos:\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1=2-x_2 \end{cases}$$

con lo que se concluye que no es infectiva. Se debe restringir el dominio $D_R f=\{\forall x\in R/\,x\geq 1\}$

De esta manera solo se podrán considerar las expresiones comprendidas en este intervalo: ***(a) y (c)*** con lo cual se llega a: $x_1=x_2$

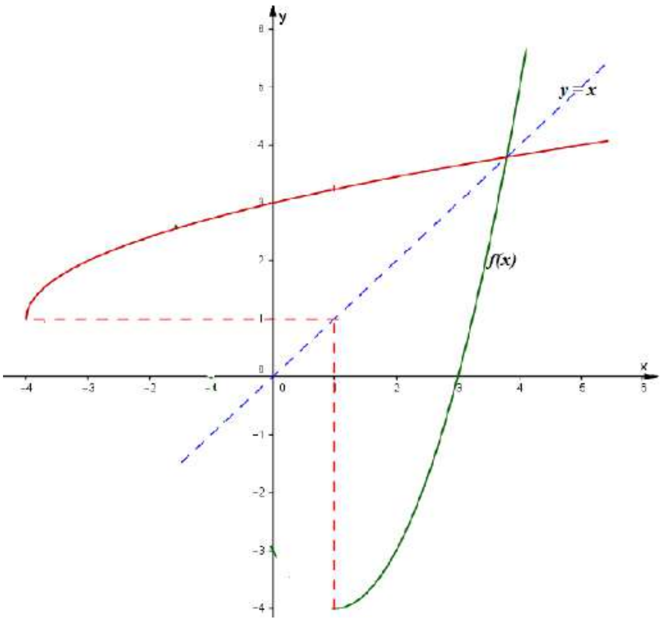
Sobreyectiva: Si tenemos en cuenta que la imagen está restringida por el dominio, la función será sobreyectiva, no obstante se puede verificar: $f(x) = (x-1)^2 - 4$ como $x = 1 \pm \sqrt{y+4}$ tendremos:

$f(x) = \left(1 \pm \sqrt{y+4} - 1\right)^2 - 4 \quad \rightarrow \quad f(x) = \left(\pm\sqrt{y+4}\right)^2 - 4 \quad \rightarrow \quad f(x) = (y+4) - 4 \quad \rightarrow$

$f(x) = y$

La inversa será: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$

B) Gráfica de la función con su inversa.-



5- Calcular: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x.\sqrt{x} - a.\sqrt{a}}$ Se multiplica y divide por el conjugado del numerador y del denominador: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)\left(x.\sqrt{x} + a.\sqrt{a}\right)}{\left(x.\sqrt{x} - a.\sqrt{a}\right)\left(x.\sqrt{x} + a.\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}$ luego se puede expresar:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2\right]\left(x.\sqrt{x} + a.\sqrt{a}\right)}{\left[\left(x.\sqrt{x}\right)^2 - \left(a.\sqrt{a}\right)^2\right]\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{[x - a]\left(x.\sqrt{x} + a.\sqrt{a}\right)}{\left[x^3 - a^3\right]\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}$ luego en el denominador se factoriza por la diferencia de las bases $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)\left(x.\sqrt{x} + a.\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(x^2 + xa + a^2\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}$ cancelando:

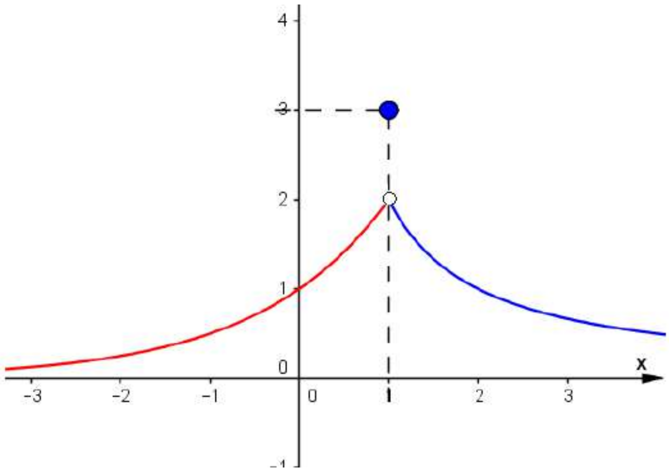
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\left(x.\sqrt{x} + a.\sqrt{a}\right)}{\left(x^2 + xa + a^2\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}$ se valúa para saber si se salva la indeterminación:

$$\lim\limits_{x \to a} \frac{\left(x.\sqrt{x} + a.\sqrt{a}\right)}{\left(x^2 + xa + a^2\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \frac{\left(a.\sqrt{a} + a.\sqrt{a}\right)}{\left(a^2 + a.a + a^2\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{a}\right)} = \frac{2a\sqrt{a}}{3a^2.2\sqrt{a}} = \frac{1}{3a}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x.\sqrt{x}-a.\sqrt{a}} = \frac{1}{3a}$$

3) Dada: $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x < 1 \\ 3 & si \quad x = 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) Graficar la función dada



b) Analizar la continuidad en $x_0 = 1$

$i) \quad f(1) = 3$

$ii) \quad \lim_{x \to 1^-} 2^x = 2 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x} = 2 \quad \to \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$iii) \; f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$

c) Redefinir en caso de ser necesario

$$f_R(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x < 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

4) Dada: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$ determinar:

Asíntotas

VERTICALES: se debe analizar en $x = -1 \quad y \quad x = 3$

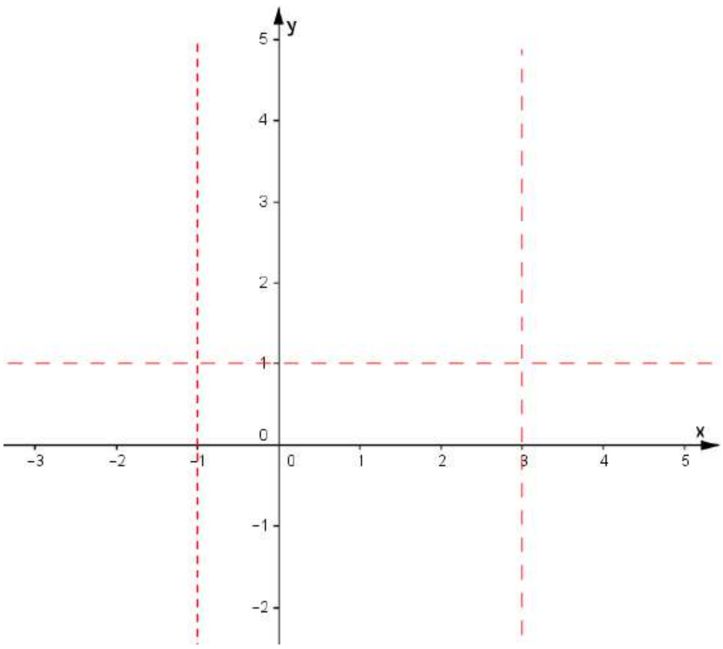
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)} = +\infty \end{array}\right\} \; En \quad x = -1 \; \exists \; Asíntota \quad vertical$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^{+}} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+3)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^{-}} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+3)} = -\infty \end{array}\right\} \; En \quad x=3 \;\exists\; Asíntota \quad vertical$$

5) ASINTOTA HORIZONTAL

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$ existe Asíntota horizontal en $y=1$

ASINTOTA OBLICUA: No tienee



NOTA: La evaluación se considerará como aprobada con la <u>correcta</u> resolución del 50% de los ejercicios planteados. Las evaluaciones domiciliarias deberán ser subidas al sistema dentro de los horarios previstos para cada turno. El alumno deberá consignar correctamente Nombre, DNI, Numero de UG- Se podrá trabajar directamente en este envío y luego publicar. No se aceptarán escaneos.- Los ejercicios deberán estar debidamente justificados.-

Prof. Ing. Eduardo Casado