UNIVERSIDAD CATOLICA DE SALTA
Facultad Economía y Administración
Materia: MATEMATICA I
Modalidad: No presencial

RESOLUCION EVALUACION Nº 1

TURNO Nº 1:

1- Dada: $f(x)=(x-1)^2$ determinar:

a) Dominio e Imagen

Dominio: Al ser una función polinomial, el dominio no tendrá restricciones: $Df=\{\forall x \in R\}$

Imagen: Se debe completar cuadrados:

$$y=(x-1)^2 \rightarrow \pm\sqrt{y}+1=x \quad \rightarrow x=1\pm\sqrt{y}$$

Luego la imagen será:

$If=\{\forall y \in R / y \geq 0\}$

b) Inversa, en caso de ser necesario restrinja el dominio.

Inyectiva: Planteamos: $f(x_1)=f(x_2)$, entonces: $\begin{cases} f(x_1)=(x_1-1)^2 \\ f(x_2)=(x_2-1)^2 \end{cases}$

$(x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \quad \rightarrow \quad (x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \quad \rightarrow$ se genera el módulo: $\sqrt{(x_1-1)^2}=\sqrt{(x_2-1)^2}$ entonces: $|x_1-1|=|x_2-1|$

Se deben analizar los módulos:

$|x_1-1|=\begin{cases} (x_1-1) & si \quad x_1 \geq 1 \ (a) \\ -(x_1-1) & si \quad x_1<1 \ (b) \end{cases}$ $\quad |x_2-1|=\begin{cases} (x_2-1) & si \quad x_2 \geq 1 \ (c) \\ -(x_2-1) & si \quad x_2<1 \ (d) \end{cases}$ haciendo las combinaciones posibles:

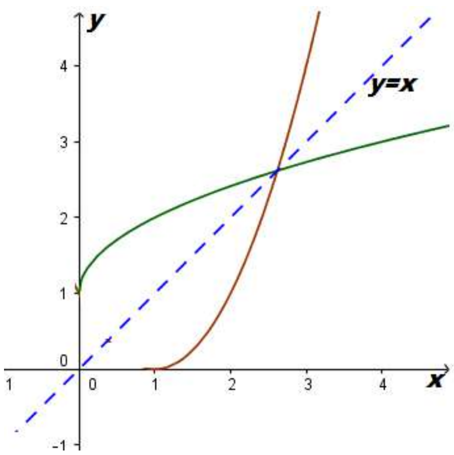
* $\left.\begin{array}{llll} (a)\ y\ (c) & x_1-1=x_2-1 & \rightarrow & x_1=x_2 \\ (a)\ y\ (d) & x_1-1=-x_2+1 & \rightarrow & x_1=2-x_2 \\ (b)\ y\ (c) & -x_1+1=x_2-1 & \rightarrow & x_1=2-x_2 \\ (b)\ y\ (d) & -x_1+1=-x_2+1 & \rightarrow & x_1=x_2 \end{array}\right\} concluimos: \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1=2-x_2 \end{cases}$ con lo que se concluye que no es infectiva. Se debe restringir el dominio $D_R f=\{\forall x \in R / x \geq 1\}$

De esta manera solo se podrán considerar las expresiones comprendidas en este intervalo: ***(a) y (c)*** con lo cual se llega a: $x_1=x_2$

Sobreyectiva: Si tenemos en cuenta que la imagen está restringida por el dominio, la función será sobreyectiva,

La función inversa será: $y=1+\sqrt{x}$

Gráfica de la función con su inversa.-



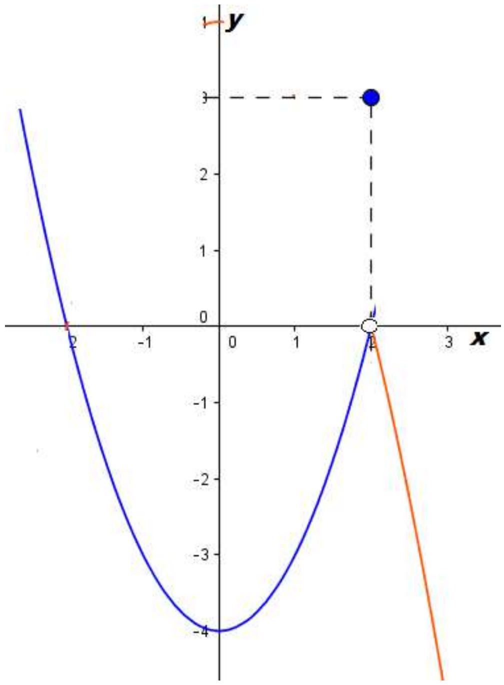
2- Calcular: $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{x}}$ Se multiplica y divide por el conjugado del numerador y del denominador: $\lim_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}$ luego se puede expresar:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left[\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left[(2)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{[x-2-2]\left(2+\sqrt{x}\right)}{[4-x]\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{[x-4]\left(2+\sqrt{x}\right)}{-[x-4]\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}-\frac{\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{\left(2+\sqrt{4}\right)}{\left(\sqrt{4-2}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{4}{2\sqrt{2}}$$ finalmente: $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{x}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

3- Dada: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x<2 \\ 3 & si \quad x=2 \\ 4-x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Graficar la función dada



b) Analizar la continuidad en $x_0=2$

$i)\quad f(2)=3$

$ii)\quad \lim_{x\to 2^+} 4-x^2=0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 2^-} x^2-4=0 \quad \to \quad \lim_{x\to 2} f(x)=0$

$iii)\; f(2)\neq \lim_{x\to 2} f(x)$

c) Redefinir en caso de ser necesario $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x<2 \\ 0 & si \quad x=2 \\ 4-x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$

4- Dada: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{4-x^2}$ determinar:

a) Asíntotas

VERTICALES: se debe analizar en $x=2 \;\; y \;\; x=-2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-1}{4-x^2}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-1}{4-x^2}=+\infty \end{array}\right\} \; En \;\; x=2 \;\; \exists \;\; Asíntota \;\; vertical$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^3-1}{4-x^2}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3-1}{4-x^2}=+\infty \end{array}\right\} \; En \;\; x=-2 \;\; \exists \;\; Asíntota \;\; vertical$$

b) **ASINTOTA HORIZONTAL**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\left(\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal

ASINTOTA OBLICUA:

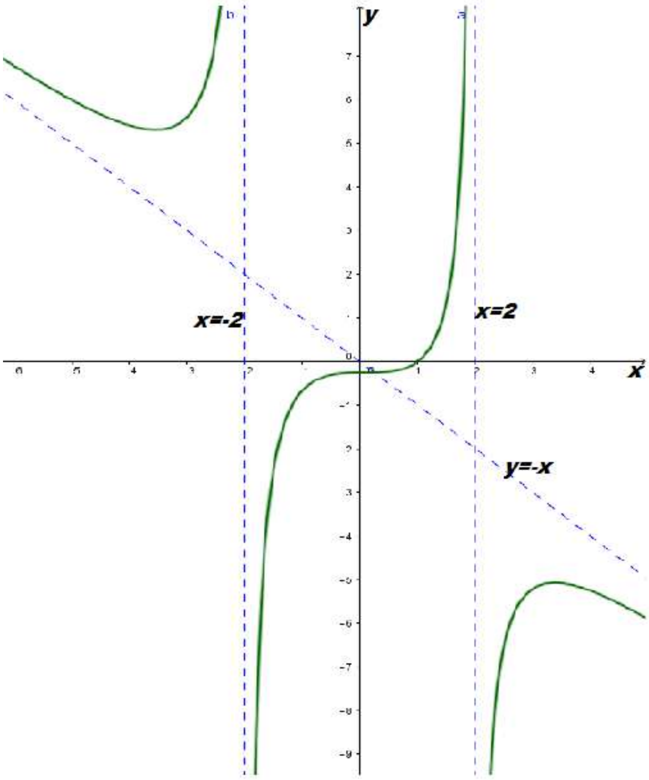
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3-1}{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{4x-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)}=-1 \quad\to\quad m=-1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{4-x^2}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1+x\left(4-x^2\right)}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1+4x-x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+4x}{4-x^2}=$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{4}{x}\right)}{x^2\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)}=0 \qquad\to\qquad b=0$$

La asíntota oblicua será: $y = -x$

c) Gráfica las asíntotas determinadas.-



TURNO Nº 2:

1- Dada: $f(x) = -(x-1)^2$ determinar:

a) Dominio e Imagen

Dominio: Al ser una función polinomial, el dominio no tendrá restricciones: $Df = \{\forall x \in R\}$

Imagen: Se debe completar cuadrados:

$$y = -(x-1)^2 \rightarrow \pm\sqrt{-y} + 1 = x \quad \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{-y}$$

Luego la imagen será:

$If = \{\forall y \in R / y \leq 0\}$

b) Inversa, en caso de ser necesario restrinja el dominio.

Inyectiva: Planteamos: $f(x_1) = f(x_2)$, entonces: $\begin{cases} f(x_1) = -(x_1-1)^2 \\ f(x_2) = -(x_2-1)^2 \end{cases}$

$-(x_1-1)^2 = -(x_2-1)^2 \quad \rightarrow \quad (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \quad \rightarrow$ se genera el módulo: $\sqrt{(x_1-1)^2} = \sqrt{(x_2-1)^2}$ entonces: $|x_1-1| = |x_2-1|$

Se deben analizar los módulos:

$|x_1-1|=\begin{cases}(x_1-1) & si \quad x_1\geq 1 \quad (a)\\ -(x_1-1) & si \quad x_1<1 \quad (b)\end{cases}$ $\qquad |x_2-1|=\begin{cases}(x_2-1) & si \quad x_2\geq 1 \ (c)\\ -(x_2-1) & si \quad x_2<1 \ (d)\end{cases}$ haciendo las combinaciones posibles:

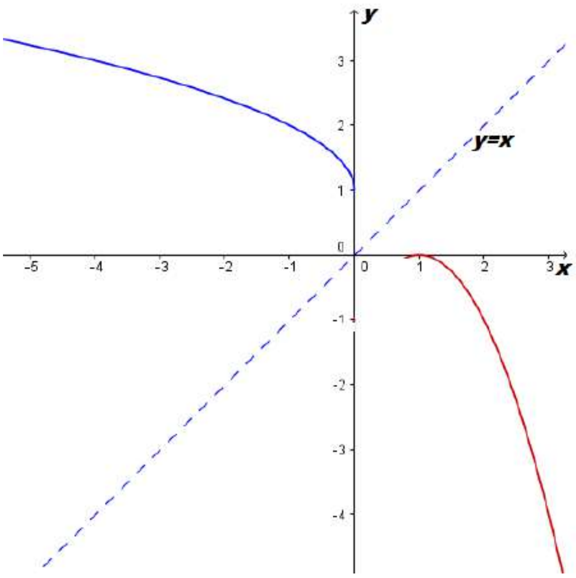
* $\left.\begin{array}{lll}(a)\ y\ (c) & x_1-1=x_2-1 & \rightarrow\ x_1=x_2\\ (a)\ y\ (d) & x_1-1=-x_2+1 & \rightarrow\ x_1=2-x_2\\ (b)\ y\ (c) & -x_1+1=x_2-1 & \rightarrow\ x_1=2-x_2\\ (b)\ y\ (d) & -x_1+1=-x_2+1 & \rightarrow\ x_1=x_2\end{array}\right\}$ $concluimos: \begin{cases}x_1=x_2\\ x_1=2-x_2\end{cases}$ con lo que se concluye que no es infectiva. Se debe restringir el dominio $D_R f=\{\forall x\in R/x\geq 1\}$

De esta manera solo se podrán considerar las expresiones comprendidas en este intervalo: ***(a) y (c)*** con lo cual se llega a: $x_1=x_2$

Sobreyectiva: Si tenemos en cuenta que la imagen está restringida por el dominio, la función será sobreyectiva,

La función inversa será: $y=1+\sqrt{-x}$

Gráfica de la función con su inversa.-



5- Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ Se multiplica y divide por el conjugado del numerador y del denominador: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}$ luego se puede expresar:

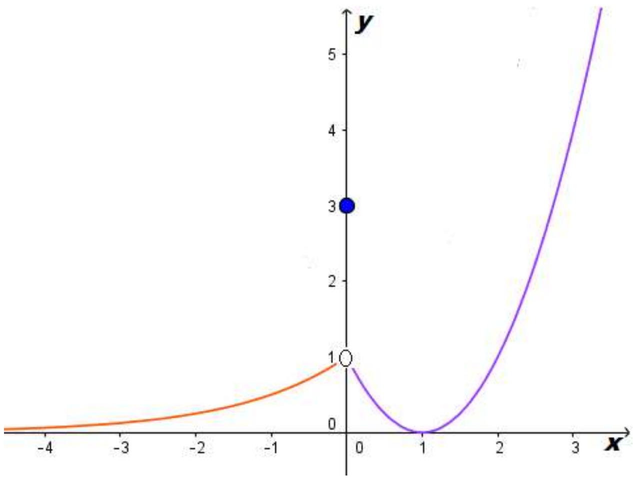
$$\lim_{x\to 4}\frac{\left[(\sqrt{x})^2-(2)^2\right](\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+2)\left[(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{2})^2\right]}=\lim_{x\to 4}\frac{[x-4](\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+2)[x-2-2]}=\lim_{x\to 4}\frac{[x-4](\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+2)[x-4]}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{4-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

finalmente: $\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

3) Dada: $f(x)=\begin{cases} 2^x & si \quad x<0 \\ 3 & si \quad x=0 \\ (x-1)^2 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Graficar la función dada



b) Analizar la continuidad en $x_0=0$

$i)\quad f(0)=3$

$ii)\quad \lim_{x\to 0^-}2^x=1 \quad\wedge\quad \lim_{x\to 0^+}(x-1)^2=1 \quad\to\quad \lim_{x\to 0}f(x)=1$

$iii)\ f(0)\neq\lim_{x\to 0}f(x)$

c) Redefinir en caso de ser necesario $\quad f(x)=\begin{cases} 2^x & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ (x-1)^2 & si \quad x>0 \end{cases}$

4) Dada: $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$ determinar:

a) Asíntotas

VERTICALES: se debe analizar en $x=1 \ \ y \ \ x=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^3}{x^2-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^3}{x^2-1}=-\infty\end{array}\right\} \; En \;\; x=1 \;\exists\; Asíntota \;\; vertical$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x^3}{x^2-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x^3}{x^2-1}=-\infty\end{array}\right\} \; En \;\; x=-1 \;\exists\; Asíntota \;\; vertical$$

d) ASINTOTA HORIZONTAL

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{2}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal

ASINTOTA OBLICUA:

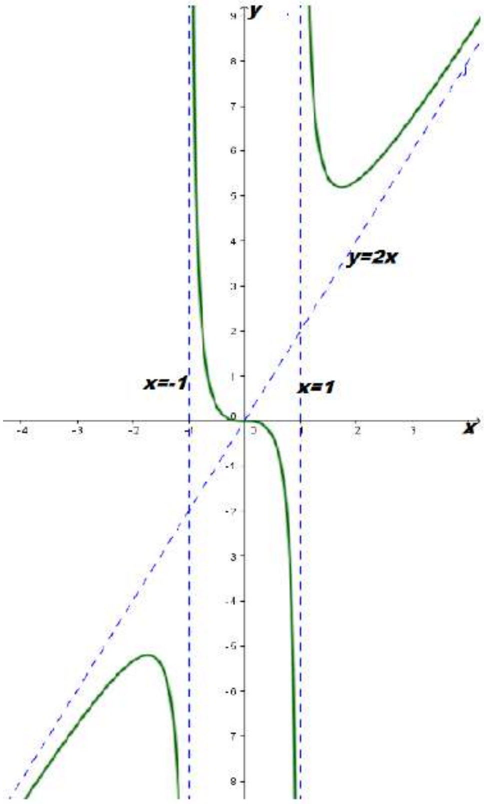
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=2 \;\;\to\;\; m=2$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-1}=$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=0 \qquad\to\qquad b=0$$

La asíntota oblicua será: $y=x$

UNIVERSIDAD CATOLICA DE SALTA
Facultad Economía y Administración
Materia: MATEMATICA I
Modalidad: No presencial



NOTA: La evaluación se considerará como aprobada con la <u>correcta</u> resolución del 50% de los ejercicios planteados. Las evaluaciones domiciliarias deberán ser subidas al sistema dentro de los horarios previstos para cada turno. El alumno deberá consignar correctamente Nombre, DNI, Numero de UG- Se podrá trabajar directamente en este envío y luego publicar. No se aceptarán escaneos.- Los ejercicios deberán estar debidamente justificados.-

Prof. Ing. Eduardo Casado